ProTEEM

TEAM UP FOR PROTEEM

Développement professionnel continu

Cours de mathématiques

19-23 Août 2024

Co-funded by the European Union

Universiteit Antwerpen
ASOE | Antwerp School of Education

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or EACEA. Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for the

Content

Introduction

Ce cours a été créé en collaboration avec mes collègues et anciens collègues du programme de formation des enseignants du Antwerp School of Education.

Je remercie Johan Deprez et Filip Moons qui reconnaîtront les textes qu'ils ont rédigés eux-mêmes ou en collaboration avec moi.

Je remercie Ellen Vandervieren pour la contribution qu'elle a apportée par le contenu de ses cours.

Je remercie Carine Maras et Johan Busschots pour la relecture de certains textes.

Je remercie Laure Ninove pour sa contribution à la révision de l'annexe 1 et pour son aide à la traduction française du texte.

Je remercie Nele Kempenaars pour l'idée du plan du cours.

Je remercie tous les participants et les instructeurs des modules de mathématiques de ProTEEM pour leur enthousiasme, qui m'a incité à écrire ce cours qui fournit des informations supplémentaires sur les diapositives du cours.

Je remercie très sincèrement Tom Smits qui est la force motrice du projet ProTEEM pour lequel, entre autres, ce cours a été écrit.

Gilberte Verbeeck

Essen, 11 april 2025

1 Le plan de cours

1.1 Travail pour le module suivant

Chaque participant doit préparer un plan de cours avec tout le matériel nécessaire pour une leçon de didactique des mathématiques qu'il enseignera dans son propre contexte. Le sujet de la leçon doit être les mathématiques ou la didactique des mathématiques.

1.2 Objectif d'une préparation de cours

La préparation d'une leçon vise à mettre l'enseignant en position de force pour dispenser la leçon (Didactisch referentiekader, Meeus & Verbeeck, 2016, ACCO, p 23). L'idée selon laquelle la préparation des cours réduirait la spontanéité est totalement fausse. Au contraire, plus la préparation est bonne, plus l'enseignant dispose d'énergie pendant la mise en œuvre pour répondre spontanément à ce qui se présente. Après tout, la préparation d'une leçon n'est pas une camisole de force qu'il faut exécuter anxieusement dans les moindres détails. Un bon enseignant sait comment utiliser sa préparation avec souplesse et répondre aux opportunités et difficultés inattendues du moment. La préparation des cours aide l'enseignant à évaluer à l'avance les scénarios possibles et la meilleure façon d'y répondre. Cela lui permet de laisser libre cours à ses intuitions spontanées, qu'il peut ou non suivre. La préparation de la leçon vise à mettre l'enseignant en position de force lors de la mise en œuvre de la leçon : mieux il est préparé, plus il a de place pour la spontanéité » (Algemene didactiek, Meeus, Tanghe & Verbeeck, 2020, Acco, p21)

1.3 Le modèle de plan de cours

Les plans de cours se présentent sous différentes formes et tailles. Nous avons accepté de travailler avec le modèle suivant, que nous expliquons plus loin.

Lesson plan from xx (Name of University)

Subject & duration of the lesson	Student level

Lesson topic	Number of students

Initial situation

Please use the model of ASoE. Complete the 5 categories with relevant information for you lessen. *Add previous knowledge for the lesson under the category Student.*

Lesson specific objectives

Number	Objective

Evaluation/assessment during this lesson

Objective (Nr.)	Which assessment?

Sources – References

Lesson outline

Time	Objective	Learning content	Teaching method – Activity – Grouping	Materials – Seating arrangement

Board layout

A. Situation initial

Nous avons accepté de travailler avec le modèle développé par Mees W. dans le cadre du cours ‘Didactisch referentiekader’.

Catégorie	Facteurs contextuels
élève	connaissances préalables, niveau d'études, intelligence, motivation, peur de l'échec, condition physique, bien-être général, diversité socioculturelle, sexe, ...
groupe d'élèves	taille du groupe, dynamique de groupe, comportement d'intimidation, sous-cultures, ...
professeur	âge, éducation, attitude pédagogique, style d'enseignement, intelligence, motivation, sensibilité au stress, condition physique, bien-être général, milieu socioculturel, sexe, expérience de l'enseignement, phase de la carrière, ...
l'école	(sujet) collègues, gestion, taille de l'école, organisation et politique de l'école, projet pédagogique, emplacement et architecture de l'école, infrastructure et ressources, ...
parents	soutien financier, pratique et éducatif, participation à la politique de l'école, ...
circonstances	politique de l'éducation, situation socio-économique, actualité, conditions météorologiques, ...

B. Objectifs spécifiques de la leçon

La question centrale est la suivante : que devraient être capables de faire les élèves à la fin de cette leçon ? Les objectifs de la leçon constituent la base d'un test sur ce thème. Utilisez le modèle de Kilpatrick (voir 3.2) pour vérifier si vous variez suffisamment les objectifs de la leçon.

Par exemple, si vous avez introduit un concept, vous pouvez vous attendre à ce qu'après la leçon, les élèves puissent donner une définition du concept ou expliquer un aspect de la définition, donner des exemples, expliquer pourquoi le concept est important, et éventuellement dire quand et par qui le concept a été introduit pour la première fois, etc. Si vous donnez des exercices sur la résolution de certaines intégrales de fonctions polynomiales, vous pouvez vous attendre à ce que les élèves puissent résoudre une intégrale spécifique de manière algébrique et à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur, fournir une représentation graphique de l'intégrale spécifique, déterminer une limite supérieure d'une intégrale spécifique pour une surface donnée, etc. Veillez à formuler les objectifs de la leçon en termes de comportement observable. Veillez à formuler les objectifs de la leçon en termes de comportement observable. Par exemple: Les élèves expliquent pourquoi une fonction exponentielle n'est définie que pour $a > 0$ en $a \neq 0$.

C. L'évaluation pendant la leçon

Cette section traite de l'évaluation formative qui permet de déterminer si l'élève atteint un ou plusieurs objectifs de la leçon. Il n'est pas nécessaire de viser l'exhaustivité. Il s'agit d'une ou plusieurs formes d'évaluation très courtes qui vous donnent un aperçu du processus d'apprentissage de chaque élève. Les formats de classe ne conviennent pas à cette fin, car ils ne fournissent pas à l'enseignant suffisamment d'informations sur la situation de chaque élève. Par exemple, lors d'une discussion classique sur l'enseignement et l'apprentissage, l'enseignant a un aperçu de ce que certains élèves peuvent faire, mais jamais de ce que chaque élève de la classe peut faire (surtout si le nombre d'élèves dans la classe est supérieur à 10). Par ailleurs, lors de la réalisation d'exercices individuels, l'enseignant doit faire preuve de beaucoup de concentration pour savoir dans quelle mesure chaque élève atteint l'objectif de la leçon dans le cadre de ces exercices. Des formes de travail telles qu'un ticket d'introduction ou de sortie, un quiz ou un DÉS (Dialogue éducatif structuré) dans lequel chaque élève de la classe est activé peuvent être incluses dans cette section en tant que forme d'évaluation.

D. Ouvrages consultés et références

Référez-vous à des ouvrages sur le contenu mathématique ou la didactique, à des cours, à des revues ou à des sites web que vous utilisez pour préparer et dispenser la leçon. L'intelligence artificielle (IA) peut être un partenaire d'entraînement utile dans ce processus. Lorsque vous utilisez l'IA, il est intéressant d'inclure l'invite dans votre référence.

Les questions utiles sont les suivantes : comment le sujet est-il traité dans différents (manuels), qu'est-ce qui précède et suit la leçon que vous devez donner, savez-vous quelque chose sur l'origine des concepts abordés dans la leçon, y a-t-il des applications, etc.

Si vous utilisez des diapositives, une feuille de travail, etc., dans la leçon, indiquez si vous les avez conçues vous-même ou si vous les avez empruntées à quelqu'un d'autre ou à l'internet. Il n'y a pas de problème à utiliser le travail de quelqu'un d'autre dans votre leçon, mais une citation correcte est nécessaire.

E. Structure de la leçon

Il n'existe pas de règles fixes garantissant qu'une leçon est bien structurée d'un point de vue didactique. De nombreux éléments jouent un rôle dans la construction didactiquement responsable d'une leçon. Nous abordons ci-dessous plusieurs aspects que vous devriez ou pouvez prendre en considération. De nombreux éléments mentionnés ci-dessous interagissent également entre eux.

Même si une heure de cours dans une école secondaire, par exemple, ne dure que 40 à 50 minutes, il est impossible pour les élèves de rester concentrés pendant toute cette période. Pour cette seule raison, il est nécessaire de diviser la leçon en parties plus petites, que nous appelons des séquences. La durée typique d'une telle séquence est d'environ dix minutes. En structurant votre leçon à l'aide de séquences, vous créez immédiatement un soulagement pendant la leçon : pendant une séquence, vous vous attendez à ce que les élèves soient concentrés, et entre les séquences, les rênes peuvent être un peu relâchées. Souvent, un objectif spécifique est associé à une séquence. Il est bon d'évaluer brièvement à la fin d'une séquence si les élèves ont atteint cet objectif. D'une part, chaque séquence doit former un petit ensemble cohérent, mais d'autre part, l'ensemble des séquences de cours doit également former un grand tout. En d'autres termes, il doit y avoir un fil rouge tout au long de la leçon. De cette manière, vous vous assurez que votre leçon est bien structurée. (Et bien sûr, il devrait également y avoir un fil rouge qui traverse toute la série de leçons sur un sujet particulier...)

Travailler avec des séquences ne vous aide pas seulement à structurer votre leçon du point de vue du contenu d'apprentissage. Il peut également vous aider à choisir des méthodes d'enseignement appropriées. Souvent, ce n'est pas une bonne idée de faire un cours magistral pendant toute une leçon ou de faire travailler les élèves en groupe pendant toute une leçon. Il est préférable de varier les méthodes d'enseignement au cours d'une leçon, en d'autres termes, de choisir différentes méthodes d'enseignement pour différentes séquences.

Vous devez construire votre leçon à partir de petites parties cohérentes qui forment un tout logique. Lorsque vous préparez et donnez votre leçon, vous devez prêter attention à ces deux aspects. Au début de la leçon, vous reprenez le fil. Vous placez la leçon dans un contexte plus large. Vous pouvez, soit au début de la leçon, soit plus tard dans une autre séquence de la leçon, vérifier si les élèves disposent des connaissances préalables nécessaires (de la leçon précédente, d'une leçon antérieure, d'une année scolaire précédente) pour suivre la leçon ou une partie de la leçon. Vous pouvez éventuellement terminer chaque partie par une question pour vérifier si les élèves ont compris cette séquence de cours. Le début et la fin d'une séquence sont également des moments privilégiés pour mettre en évidence le fil rouge de la leçon : quel est l'objectif que nous nous fixons, et où en sommes-nous actuellement par rapport à cet objectif ? À la fin de la leçon, vous passez brièvement en revue ce qui a été appris.

Dans votre préparation de cours, vous devez indiquer clairement ces séquences. Séparez-les, par exemple, par une ligne horizontale (par exemple, situation problème pour motiver un concept, exemples, définition, exercices). Choisissez pour chaque séquence une méthode d'enseignement appropriée. Indiquez dans le formulaire un objectif spécifique, ce que vous attendez des élèves à la fin de la séquence et, idéalement, comment vous évaluerez à la fin d'une séquence si les élèves ont atteint l'objectif. Estimez le temps dont vous pensez avoir besoin pour la séquence. Pour chaque séquence, vous pouvez donc remplir les cinq colonnes comme suit :

- Dans la première colonne, vous estimez le temps.
- Dans la deuxième colonne, vous inscrivez le numéro de l'objectif de la leçon sur lequel vous travaillez. Vous écrivez les numéros répartis à côté du contenu d'apprentissage approprié, à la bonne hauteur. Il ne s'agit pas de placer tous les numéros au début de la séquence de cours.
- Dans la troisième colonne, vous inscrivez le contenu d'apprentissage couvert par la leçon. Il s'agit de ce que les élèves doivent savoir après la leçon. Pour les questions-réponses, vous notez le modèle de réponse à vos questions. Si les élèves doivent faire des exercices, vous résolvez tous les exercices. Inscrivez ces solutions dans cette colonne ou renvoyez à une annexe où vous ajoutez les solutions des exercices.
- Dans la quatrième colonne, vous écrivez ce que vous et vos élèves faites pendant la leçon (les méthodes d'enseignement avec les instructions, les questions en deux étapes pour un Q&R, ou ce que vous ferez ou demanderez s'il n'y a pas de réponse ou pas la réponse attendue, les questions d'aide si les élèves ont besoin de faire un travail, ou si vous appelez les élèves au tableau, etc. Dans cette colonne, préparez également des questions et des questions de suivi pour encadrer les élèves si nécessaire lors de la résolution des exercices. Préparez-vous aux difficultés que les apprenants pourraient rencontrer pour résoudre l'exercice.
- Dans la cinquième colonne, vous dressez la liste des outils. En didactique des mathématiques ou de l'informatique, il s'agit, par exemple, d'un smartboard avec une version tableau du manuel, GeoGebra, des fiches de travail, des cartes pour diviser les groupes, du matériel pour activer les méthodes d'enseignement, une calculatrice graphique, un ordinateur portable, un téléphone mobile, etc.

2 Structure didactique d'une leçon

2.1 L'inversion (Anti-)didactic

"*A common theme of the greater part of my publications has been: change of perspective; in particular what I called inversion and conversion, a mathematical virtue, practised and cherished from olden times. No mathematical idea has ever been published in the way it was discovered. Techniques have been developed and are used, if a problem has been solved, to turn the solution procedure upside down, or if it is a larger complex of statements and theories, to turn definitions into propositions, and propositions into definitions, the hot invention into icy beauty. This then if it has affected teaching matter, is the didactical inversion, which as it happens may be anti-didactical. Rather than behaving antididactically, one should recognise that the young learner is entitled to recapitulate in a fashion the learning process of mankind. Not in the trivial manner of an abridged version, but equally we cannot require the new generation to start just at the point where their predecessors left off.*" (une citation du mathématicien et professeur de mathématiques néerlandais Hans Freudenthal, Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, 1983)

L'ordre dans lequel un travail mathématique terminé est écrit (par exemple, la preuve d'une propriété dans un article ou dans un livre) diffère de l'ordre dans lequel ce travail mathématique a été découvert. Souvent, l'ordre est pour ainsi dire inversé. Hans Freudenthal souligne également que l'ordre d'une théorie mathématique finie n'est souvent pas le meilleur ordre à suivre lors de l'apprentissage des mathématiques. C'est pourquoi il appelle ce changement d'ordre (et plus largement : le changement d'organisation de la théorie) *l'inversion antididactique*.

Cette réflexion de Hans Freudenthal nous incite à questionner l'ordre utilisé dans une théorie mathématique en fonction de son utilisation en tant qu'ordre lors du processus d'apprentissage. Appliqué concrètement à la construction d'une leçon : l'ordre dans lequel les contenus d'apprentissage sont écrits dans le manuel peut ne pas être l'ordre le plus approprié à utiliser pendant la leçon. Cela ne signifie pas nécessairement que l'ordre du manuel serait mauvais : en fait, il pourrait correspondre à l'ordre que vous utilisez après le processus d'apprentissage afin d'afficher clairement ce que vous avez appris (car une inversion a également lieu après le processus d'apprentissage...). D'ailleurs, cette remarque ne s'applique certainement pas à tous les manuels : certains manuels insistent en effet beaucoup sur l'utilisation d'un ordre que l'on peut adopter au cours des leçons.

Nous avons déjà donné l'exemple ci-dessus de la construction d'une preuve d'une propriété : l'ordre dans lequel une preuve est écrite par la suite s'écarte souvent de l'ordre dans lequel les étapes ont été suivies lors de la préparation de la preuve. Nous allons maintenant appliquer l'idée d'inversion (anti-)didactique à un certain nombre d'autres exemples (en supposant une représentation quelque peu caricaturale d'un « texte exposant une théorie mathématique » ; dans la pratique, très peu de textes mathématiques sont effectivement construits entièrement de cette manière).

- Dans un texte exposant une théorie mathématique, un concept est d'abord *défini*, puis des *exemples* sont présentés. Dans un contexte didactique, l'ordre habituel est inversé : on traite d'abord des exemples et souvent des contre-exemples. De cette manière, le concept prend déjà forme de manière informelle. La définition formalise alors ce que les étudiants savent déjà et vous pouvez les impliquer dans sa formulation.
- Dans un texte exposant une théorie mathématique, un *théorème* est d'abord formulé, puis prouvé et appliqué à des cas concrets. On peut aussi procéder différemment. Dans le texte du manuel *De question en question* de Belgique francophone (annex 1), par exemple, on voit que les élèves « découvrent » d'abord le théorème de Pythagore pour un triangle rectangle et isocèle, puis cherchent pour quels types de triangles le théorème pourrait être valable avant de formuler le théorème en général.

- Dans un texte exposant une théorie mathématique, la théorie est construite en premier et les applications viennent ensuite. Dans un contexte didactique, il est souvent bon de partir d'une application et de construire les mathématiques à partir d'une application. Dans le livre “Wiskunde vanuit toepassingen” (Mathematics des applications), cette approche est utilisée avec la multiplication des matrices (annex 2). Les deux matrices ont une signification concrète : une matrice contient les prix unitaires de différents produits dans différents grands magasins et l'autre contient les quantités qu'une famille souhaite acheter de ces différents produits. La question de savoir combien cette famille doit payer dans chaque grand magasin conduit au produit matriciel tel qu'il est défini en mathématiques. En d'autres termes, la définition du produit matriciel n'apparaît pas ici comme un deus ex machina mais comme une abstraction mathématique d'une méthode de calcul qui montre son utilité dans la pratique. Si vous utilisez un manuel dans lequel la théorie est d'abord exposée de façon systématique et où les applications viennent ensuite (ou pas...), il peut être judicieux d'utiliser l'un des exercices comme exemple d'entrée pour construire un cours.
- Les mathématiques sont une science déductive. Cela signifie que les nouvelles connaissances sont dérivées purement par raisonnement logique à partir des connaissances déjà acquises. Cela implique, entre autres, que dans les mathématiques, en tant que théorie achevée, il y a un fort raisonnement de l'abstrait au concret. Cependant, les éléments inductifs jouent également un rôle majeur dans la découverte de nouvelles mathématiques. Par exemple, les conjectures (affirmations que l'on pense pouvoir prouver) découlent souvent de l'étude d'exemples et sont souvent « testées » dans des cas particuliers avant qu'une preuve générale ou un contre-exemple ne soit trouvé.
  De même, dans un contexte didactique, il est souvent bon de passer du concret à l'abstrait plutôt que l'inverse. D'une certaine manière, c'est l'idée maîtresse des trois exemples précédents.

2.2 Du concret à l’abstrait

‘Du concret à l'abstrait’ a déjà été brièvement évoquée au paragraphe 2.1, mais nous la développons ici. En effet, aller du concret à l'abstrait est moins évident qu'il n'y paraît à première vue.

A. Exemples particuliers ou génériques

Un premier point à noter est que lors de la préparation d'un concept abstrait, d'une propriété, d'une méthode pour résoudre un problème, ... à l'aide d'exemples concrets, il est important que toutes les facettes importantes du concept abstrait soient présentes dans les exemples. Nous donnons un exemple.

Lors d'une leçon de stage, un étudiant a voulu appliquer la formule qui exprime la distance entre deux points quelconques de l'espace en fonction de leurs coordonnées par rapport à un système de coordonnées orthonormé. Il a préparé cela en demandant aux élèves de calculer la distance entre l'origine et le point Q coordonné $(4, 3, 2)$ en appliquant deux fois le théorème de Pythagore. Cependant, après cet exemple, les élèves n'ont pas réussi à trouver la formule générale. La raison en est que la préparation n'était pas bonne. L'exemple n'est pas seulement concret, il est aussi particulier, par exemple parce que l'un des deux points est l'origine. Une meilleure tâche est de calculer la distance du point P coordonné $(3, 1, 5)$ au point Q en utilisant deux fois le théorème de Pythagore. Ceci est un exemple générique. Ce n'est pas un hasard si la troisième coordonnée de Q est plus petite que celle de P. Cela prépare à l'utilisation des barres de valeur absolue dans la dérivation de la formule générale.

Nous donnons un autre exemple. Supposons que vous vouliez que les élèves établissent pour la première fois la formule pour le n-ième terme d'une suite géométrique, par exemple la suite géométrique avec le terme initial $t_1 = 3$ et la raison 2. Bien sûr, vous demandez d'abord aux élèves la valeur de t_2 et t_3 par exemple. Ensuite, il est bon de demander, par exemple, comment trouver la valeur de t_{10}. Bien que cela concerne toujours un terme avec un numéro de rang concret, les élèves doivent déjà suivre le raisonnement général (nous devons multiplier t_1 plusieurs fois par 2, du numéro de rang 1 à 10 cela donne 9 étapes, …). Calculer t_{10} est donc un exemple concret générique. Après cet exemple, les élèves peuvent facilement trouver la formule pour le n-ième terme.

Le message que nous voulons donner dans ce paragraphe est donc que vous devez travailler avec des exemples génériques si vous voulez préparer l'abstraction de manière réussie. Les exemples génériques sont des exemples dans lesquels tous les aspects importants du concept abstrait sont présents. Cependant, nous devons immédiatement nuancer cela:

- Les concepts mathématiques importants sont souvent si riches que vous ne pouvez pas retrouver tous les aspects dans un seul exemple. Pensez par exemple à la dérivée. Il est préférable de travailler avec plusieurs exemples différents. Vous trouverez cela, par exemple, dans le texte sur l'introduction du concept de dérivée dans le magazine “Uitwiskeling” (annex 3).
- Parfois, il est trop difficile de commencer directement avec un exemple générique. Dans ce cas, vous pouvez commencer par un exemple facile et spécifique, puis travailler progressivement vers un exemple générique. Dans l'exemple de la distance entre deux points dans l'espace, vous pouvez par exemple travailler avec les sous-tâches suivantes:
    a. Calculer la distance de l'origine au point Q avec les coordonnées $(4, 3, 2)$ en utilisant deux fois le théorème de Pythagore.
    b. Calculer de la même manière la distance du point R avec les coordonnées $(3, 1, 1)$ à Q.
    c. Calculer de la même manière la distance du point P avec les coordonnées $(3, 1, 5)$ à Q.

B. Concret et abstrait

Notre plaidoyer en faveur du concret ne doit certainement pas être compris comme un appel à se limiter au traitement d'exemples concrets. Au contraire, il est bien entendu que les élèves doivent acquérir des connaissances et des compétences générales qui peuvent être utilisées dans diverses situations. Les exemples doivent soutenir la construction de ces connaissances et compétences générales et transférables, mais nous ne devons pas commettre l'erreur de supposer que l'abstraction et le transfert de ces exemples se produisent *automatiquement*. Au contraire, de nombreuses études montrent par exemple que le transfert se fait très difficilement.

Souvent, on peut remarquer qu'un élève a compris une méthode dans son ensemble, par exemple parce qu'il peut appliquer cette méthode dans tous les exemples concrets, mais cela ne signifie pas nécessairement qu'il peut en donner la formulation abstraite.

Après le traitement des exemples, il doit donc y avoir une phase d'explicitation ou d'abstraction et, par la suite, ce qui a été appris doit de préférence être appliqué à de nouveaux exemples. Il est important que la relation entre la formulation abstraite et les exemples concrets soit claire pour les élèves. Cela peut se faire, par exemple, en réalisant l'abstraction avec les élèves à l'aide d'une discussion pédagogique.

C. Entre le concret et l’abstrait

Concret et abstrait peuvent être considérés comme deux extrêmes d'un continuum. Entre les extrêmes "très concret" et "très abstrait", il existe de nombreuses situations qui sont "partiellement concrètes et partiellement abstraites". Nous y associons quelques remarques.

Parfois, il est conseillé de ne pas effectuer l'abstraction en une seule fois, mais d'augmenter le degré d'abstraction par étapes. Dans un problème avec des paramètres, il est par exemple bon d'introduire les paramètres un par un.

Ce qui est concret pour une personne ne l'est pas pour une autre. Par exemple, le nombre 5 est un objet concret pour un élève du secondaire, tandis qu'un tout-petit ou un enfant d'âge préscolaire est encore en train d'abstraire ce concept de son environnement. À mesure qu'un élève apprend plus de mathématiques, de plus en plus d'objets mathématiques deviennent concrets et les exemples concrets n'ont donc pas besoin d'être "moins concrets".

En relation avec ce qui précède, il est bon de garder à l'esprit qu'en tant que professeur de mathématiques, vous êtes beaucoup plus avancé dans le processus d'abstraction que vos élèves. Par conséquent, vous avez tendance à considérer certaines situations comme "égales" que les élèves perçoivent comme différentes. Pensez par exemple à la multiplication d'un graphique par rapport à l'axe horizontal. L'effet d'une telle multiplication est perçu de manière très différente selon que le facteur est positif ou négatif (avec ou sans réflexion) et selon que la valeur absolue du facteur est supérieure ou inférieure à 1 (étirement versus compression du graphique). Dans les exemples et les exercices, vous devrez introduire suffisamment de variations à cet égard.

D. Non seulement des exemples, mais aussi des contre-exemples

Lorsque vous généralisez à partir d'exemples (consciemment ou inconsciemment), le danger de la surgénéralisation est toujours présent. Un exemple bien connu est le raisonnement proportionnel incorrect : beaucoup de gens supposent une proportionnalité entre des grandeurs alors que ce n'est pas le cas. Par exemple, beaucoup de gens pensent à tort que la surface d'un carré double lorsque le côté du carré double. C'est pourquoi il est utile de donner non seulement des exemples, mais aussi des contre-exemples. Les contre-exemples aident à définir les limites du concept étudié, de la méthode, etc.

3 Compétence mathématique

3.1 Cas

Pendant les leçons sur les fonctions du second degré, Mme Peeters veille à inclure de nombreux exercices dans lesquels les élèves doivent faire une recherche par le dessin, par ex :

- Faire une recherche par le tableau de signes de la fonction $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$
- Méthode ?
- Calculer les points zéro à l'aide du discriminant, les placer dans un tableau de signes et remplir les signes.

Son approche semble fonctionner, car les élèves peuvent bientôt tracer facilement des tableaux de fonctions du second degré.

En guise de travail à la maison, Mme Peeters leur demande de faire l'exercice suivant :
Vous lancez une balle avec un ami. Vous lancez la balle selon la fonction $y = -x^2 + 5x$. Elle atterrit parfaitement dans les bras de votre ami. Quelle est alors la distance qui vous sépare ?

Pratiquement aucun élève de la classe ne réussit l'exercice. Comment cela se fait-il ?

Le problème de l'étude de cas

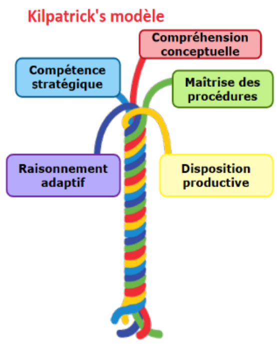
D'après les exercices réalisés en classe, les élèves ont principalement appris à appliquer une procédure ou une technique donnée (cf. réalisation le tableau de signes).

Dans l'exercice à domicile, ils ont besoin de plus que cela. Ils doivent d'abord traduire un problème en une formule mathématique. Ils doivent vérifier s'il s'agit d'une fonction du second degré. Ils doivent choisir une stratégie de résolution. Ils doivent avoir envie de mordre dans le problème. Etc...

Il faut plus que des connaissances procédurales pour être à l'aise en mathématiques (en tant qu'apprenant et en tant qu'enseignant !).

3.2 Objectifs de l'enseignement des mathématiques

Qu'est-ce qu'un enseignement des mathématiques de qualité ? Quels objectifs les élèves doivent-ils atteindre pour parvenir à un niveau élevé de compétence en mathématiques ? Depuis des générations, les experts en didactique cherchent à répondre à ces questions. Aux États-Unis, le National Research Council de Washington a demandé à plusieurs éminents mathématiciens, psychologues de l'éducation, éducateurs et experts en didactique des mathématiques de définir la compétence mathématique. Cela a conduit à la publication de Adding it up ! [Kilpatrick et al., 2001], qui présente un modèle de compétence en mathématiques, devenu depuis un modèle mondialement accepté, avec cinq composantes fortement imbriquées. Lorsqu'une personne pratique les mathématiques avec succès, elle a besoin de toutes ces composantes. Cette imbrication est représentée par cinq fils qui, ensemble, forment un fil conducteur (voir la figure ci-dessous). Nous décrivons les cinq composantes :



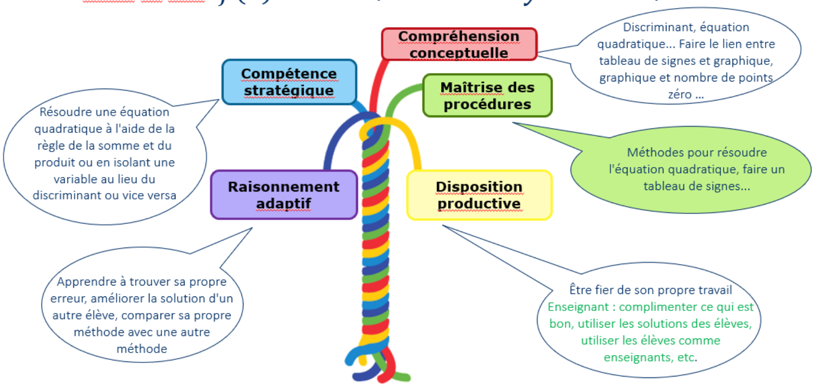
- **Compréhension conceptuelle** = Compréhension des concepts, opérations et relations mathématiques.
- **Maîtrise des procédures** = connaissance des procédures et des techniques permettant de résoudre avec souplesse, précision et efficacité un certain type d'exercices (répétitifs).
- **Compétence stratégique** = capacité à formuler, représenter et résoudre des problèmes mathématiques.
- **Raisonnement adaptatif** = capacité à raisonner logiquement, à réfléchir, à expliquer et à démontrer.
- **Disposition productive** = trouver que les mathématiques sont utiles et qu'elles en valent la peine, associé à la conviction que l'effort est payant pour devenir plus compétent en mathématiques. Satisfaction et succès dans la recherche permanente de solutions.

Comment traduire ces différentes composantes de la compétence mathématique dans la pratique de la classe ? Dans la figure ci-dessous, nous donnons un exemple des différentes composantes liées aux fonctions quadratiques et liées au cas du 3.1.

Le lecteur attentif remarquera deux choses : d'une part, le modèle de la compétence mathématique ne suscite que très peu de résistance ; nous rêvons tous de rendre les élèves compétents dans toutes ces facettes d'un enseignement mathématique de qualité. D'autre part, nous observons également que beaucoup de temps de cours et d'évaluation se concentrent plus que la moyenne sur les connaissances procédurales des élèves. Prenez un test ou un examen moyen sur les fonctions quadratiques, et la plupart des questions évalueront les connaissances procédurales (par exemple, résoudre cette équation quadratique, effectuer une analyse des signes de la fonction quadratique suivante, etc.)

Cette divergence a également été largement étudiée dans la littérature [Pesek & Kirshner, 2000]. L'une des raisons pour lesquelles l'accent est mis sur les connaissances procédurales est qu'elles sont transparentes et directes : les élèves apprennent la stratégie de résolution d'une équation quadratique, qui leur est ensuite demandée lors d'un test. Tout le monde est content. En outre, et ce n'est pas sans importance, les connaissances procédurales sont également cruciales pour le processus d'apprentissage. Sans de bonnes routines, les élèves éprouvent des difficultés à approfondir les idées mathématiques ou à résoudre des problèmes mathématiques. L'attention dont ils ont besoin pour élaborer leurs résultats au lieu de les rappeler facilement se fait au détriment de l'attention portée aux approches de résolution de problèmes ou à la recherche de relations sous-jacentes.

Lien avec le cas: $f(x) = 2x^2 + 2x - 4 \quad y = -x^2 + 5x$

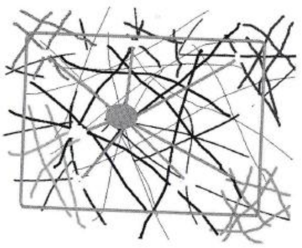


Il ne s'agit certainement pas d'une histoire du type "ou bien, ou bien" : les connaissances procédurales sont nécessaires, mais si elles sont complétées par un enseignement et une évaluation fortement axés sur les autres volets du modèle de compétence mathématique, l'apprentissage des mathématiques devient alors plus durable et plus significatif pour les élèves [Pesek & Kirshner, 2000]. Quand on comprend quelque chose, on s'en souvient beaucoup mieux.

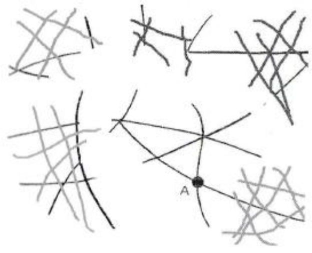
3.3 Schémas cognitifs

Lorsque les élèves acquièrent des connaissances procédurales sans avoir une compréhension approfondie de ce qu'ils font, ils acquièrent des connaissances isolées. Les nouveaux concepts ou compétences ne peuvent alors pas s'appuyer sur un réseau de connaissances existant. Ainsi, les élèves doivent apprendre de nouvelles procédures de résolution pour chaque petite variation des problèmes.

L'un des concepts permettant de rendre visibles les connaissances conceptuelles des élèves est celui des schémas cognitifs. Le terme "cognition" signifie "connaissance", "ce que quelqu'un sait" et, plus communément, "le bagage mental de quelqu'un". Un schéma cognitif est l'ensemble cohérent des connaissances d'une personne. En général, il s'agit de connaissances dans un domaine spécifique (p. ex., les fonctions exponentielles, les limites, etc.) Le terme de schéma est utilisé pour préciser la façon dont on imagine que les connaissances de l'élève sont organisées (en mémoire).



En tant qu'experts, nous devons être conscients que nous possédons un schéma cognitif particulièrement riche pour presque toutes les composantes du sujet. Comme l'illustre la figure, nous avons une vue d'ensemble de toutes les matières mathématiques de l'enseignement secondaire et nous connaissons les liens entre une dérivée, le coefficient de pente, le quotient de différence, les limites, la relation entre les graphiques ascendants/descendants...



En revanche, nos élèves, qui sont au début de l'enseignement, ont un schéma cognitif très pauvre. Comme l'illustre cette figure, ils n'ont pas encore eu l'occasion de faire des liens entre les différentes composantes de la matière, leurs connaissances sont fragmentées et ne forment pas encore un tout cohérent.

1. L'assimilation

Les schémas cognitifs ne sont pas simplement des structures statiques de connaissances stockées ; ils sont dynamiques et évoluent au cours du processus d'apprentissage. Lorsqu'un élève ajoute de nouvelles connaissances à un schéma existant au cours de son apprentissage, on parle d'assimilation. Par exemple, un enseignant peut se référer aux connaissances déjà existantes sur les "opérations inverses" lorsqu'il enseigne comment résoudre l'équation $2^x = 7$. L'opération inverse de "plus" est "moins", de "fois" est "divisé par", de "carré" est "racine" et, de la même manière, de "à la puissance de x" est "logarithme". Un nouveau concept est alors intégré dans un schéma cognitif existant (assimilation), qui s'en trouve enrichi. Bien entendu, il ne suffit pas que l'enseignant ou le manuel le mentionne une fois, il faut que les élèves puissent l'expliquer eux-mêmes à un moment ou à un autre (=connaissance conceptuelle).

2. Hébergement

Un schéma cognitif peut également changer de manière plus significative : il doit parfois être restructuré. C'est ce qu'on appelle l'adaptation. Par exemple, lorsqu'il explique comment résoudre des équations linéaires de la forme $2x + 7 = 30$ et $5x + 4 = 16$, un enseignant peut utiliser le modèle de l'équilibre. Lorsque des équations de la forme $2x + 21 = -7$ et $4 - 2x = x + 13$ doivent également être résolues, le modèle de l'équilibre ne fonctionne plus de manière évidente. Il est alors nécessaire d'adapter à un niveau plus formel le concept selon lequel la même opération doit être appliquée aux deux côtés.

3. La fragmentation

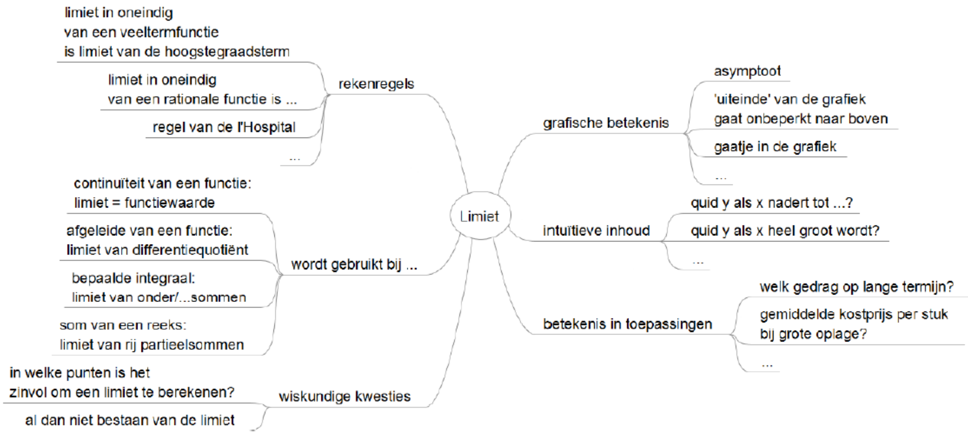
Van Dormolen [Van Dormolen, 1974] affirme que la fragmentation de la matière en petits morceaux gérables est une réussite à court terme, mais qu'elle conduit souvent au stockage de petits schémas sans lien dans la mémoire. Cette fragmentation conduit les élèves à penser qu'ils comprennent quelque chose (assimilation à un schéma existant), alors que le schéma est incomplet, comme la "version de l'élève" ci-dessus. Il s'agit d'un danger réel dans l'enseignement, où un programme strict doit être suivi et où la matière est déjà divisée en morceaux gérables par année scolaire.

3.4 Rôle de l'enseignant

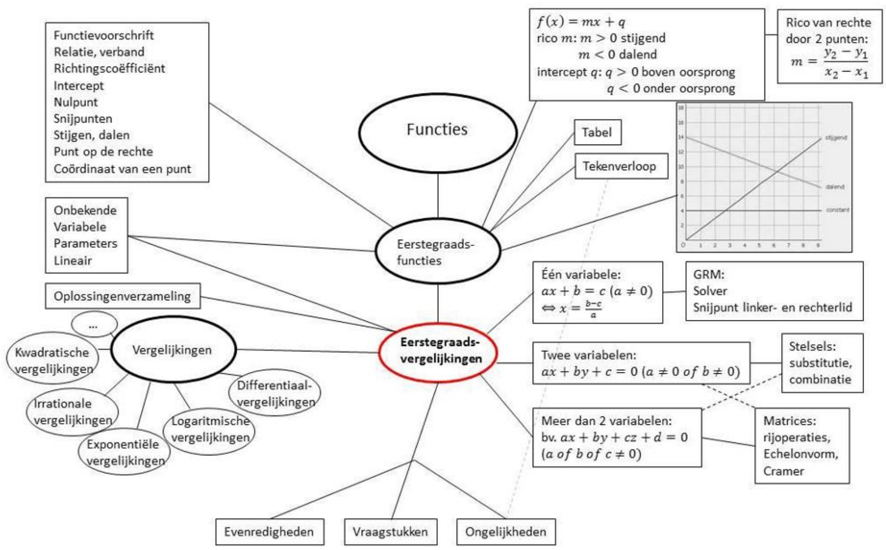
Les schémas cognitifs des élèves sont particulièrement pertinents pour l'enseignant. Pour éviter de tomber dans la "malédiction de la connaissance" [Wieman, 2007], nous devons toujours et partout être conscients que les schémas cognitifs des élèves sont beaucoup plus fragmentés que les nôtres. Chaque enseignant peut se souvenir d'une intuition qu'il n'a acquise que lorsqu'il a commencé à enseigner une certaine matière. Or, les élèves ont besoin d'en faire l'expérience tous les jours, car ils ont encore beaucoup d'idées à découvrir.

Pour l'enseignant, certains liens sont tellement évidents qu'ils ne sont plus explicitement expliqués aux élèves. Une façon d'y remédier est de créer des représentations visuelles des schémas cognitifs à atteindre pour les composantes de la matière. L'enseignant peut baser son enseignement sur ces représentations. En visualisant les schémas cognitifs, l'enseignant est beaucoup plus conscient des connaissances préalables nécessaires et des liens à établir. Il est même possible d'inclure les schémas cognitifs dans les supports de cours des élèves ou de les leur fournir. Voici quelques exemples en néerlandais.

Exemple 1 : Limites créées par J. Deprez (KU Leuven) avec Freemind
(voir http://sourceforge.net/projects/freemind) [Deprez, 2017].



Exemple 2 : Fonctions linéaires Créé par Jorinde Van Besauw (formation spécifique des enseignants en mathématiques, Université d'Anvers)



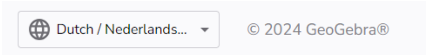
Références pour le texte de ce paragraphe (traduit de la version néerlandaise écrite par Filip Moons) :

- Deprez, Johan. 2017. Vakdidactiek Wiskunde. KU Leuven.
- Kilpatrick, Jeremy, Swafford, Jane, & Findell, Bradford. 2001. Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics. Washington, DC: The National Academies Press.
- Pesek, Dolores D., & Kirshner, David. 2000. Interference of Instrumental Instruction in Subsequent Relational Learning. NCTM.
- Van Dormolen, Joop. 1974. Didactiek van de wiskunde. Oosthoek's uitgeversmaatschappij.
- Van Streun, Anne. 2001. Het denken bevorderen. University of Groningen.
- Wieman, Carl. 2007. The "Curse of Knowledge" or Why Intuition About Teaching Often Fails. American Physical Society News.

4 GeoGebra

GeoGebra est une plateforme en ligne gratuite qui offre un grand nombre d'outils gratuits pour faire des mathématiques. Elle met également en relation des enseignants et des élèves enthousiastes et leur offre une nouvelle façon d'explorer et d'apprendre les mathématiques. Ils peuvent partager leurs idées et les applets, feuilles de travail... qu'ils ont créés pour leurs classes. C'est utile à la fois pour les enseignants et les élèves. Il est extrêmement utile pour visualiser les concepts mathématiques.

La page d'accueil de GeoGebra donne un aperçu de ce que vous pouvez faire avec GeoGebra. Il y a trop de choses à énumérer. Allez sur **www.geogebra.org** et réglez la langue que vous utilisez pour lire la page d'accueil de la plateforme. Pour cela, allez tout en bas de la page et définissez votre langue.



Le polycopié de l'annexe 4 vous permettra d'explorer la plate-forme de manière pratique.

5 Enseignement réaliste des mathématiques

5.1 Pourquoi les élèves devraient-ils apprendre les mathématiques ?

En fonction de l'élève et de son intérêt, on distingue 3 raisons d'apprendre les mathématiques.

1. Des mathématiques à utiliser dans la vie de tous les jours

La plupart des connaissances réellement nécessaires dans la vie de tous les jours sont des matières enseignées à l'école primaire, à l'exception des statistiques. L'arithmétique ou certaines connaissances géométriques élémentaires sont abordées à l'école primaire. Certaines statistiques descriptives ou la sensibilisation à la variabilité ... sont abordées dans l'enseignement secondaire.

Tout le monde, mais surtout les jeunes élèves et les élèves qui reçoivent peu de cours de mathématiques, sont le groupe cible de cette partie des mathématiques.

2. Mathématiques à utiliser dans d'autres disciplines

Les mathématiques soutiennent l'apprentissage de concepts dans d'autres disciplines. Exemples : arithmétique algébrique, valeurs propres et vecteurs propres, fonctions du premier degré, fonctions exponentielles, dérivation et intégration, équations différentielles, vérification d'hypothèses., ...

Le groupe cible est constitué de futurs scientifiques (exacts ET humains !), d'économistes, d'utilisateurs de statistiques et de techniciens, …

3. Les mathématiques pour elles-mêmes

Enfin, il y a les mathématiques pour la beauté des mathématiques elles-mêmes. Les élèves qui montrent de l'intérêt et du talent dans ce domaine devraient être amenés à étudier des sujets tels que: les preuves, le travail axiomatique et déductif, les structures mathématiques, la résolution de problèmes, les belles formes géométriques, les mathématiques en tant qu'objet culturel, ...

Le groupe cible est évidemment constitué des futurs mathématiciens et de toute personne désireuse de s'inspirer du fonctionnement des mathématiques.

5.2 Qu'est-ce qu'un enseignement réaliste des mathématiques ?

Dans l'annexe 5, vous pouvez lire la description suivante (en Anglais) de ce que nous entendons par ‘enseignement réaliste des mathématiques’: *‘L'enseignement réaliste des mathématiques - ci-après abrégé en ERM - est une théorie d'enseignement des mathématiques spécifique à un domaine, qui a été développée aux Pays-Bas. Le ERM se caractérise par le fait que des situations riches et "réalistes" occupent une place prépondérante dans le processus d'apprentissage. Ces situations servent de source pour initier le développement de concepts, d'outils et de procédures mathématiques et de contexte dans lequel les élèves peuvent, à un stade ultérieur, appliquer leurs connaissances mathématiques, qui deviennent alors progressivement plus formelles et générales et moins spécifiques au contexte. Bien que les situations "réalistes" au sens de situations du "monde réel" soient importantes dans l'ERM, le terme "réaliste" a ici une connotation plus large. Il signifie que les élèves se voient proposer des situations problématiques qu'ils peuvent imaginer. Cette interprétation du terme "réaliste" renvoie à l'expression néerlandaise "zich REALISEren", qui signifie "imaginer". C'est l'accent mis sur la réalisation de quelque chose dans l'esprit qui a donné son nom à l'ERM. Par conséquent, dans l'EGR, les problèmes présentés aux élèves peuvent provenir du monde réel, mais aussi du monde fantastique des contes de fées ou du monde formel des mathématiques, tant que les problèmes sont expérimentalement réels dans l'esprit de l'élève.’*

5.3 Problèmes authentiques

A. Quatre exercices

Pour aborder le problème de l'enseignement réaliste des mathématiques et de la compétence mathématique, nous étudions quatre exercices A, B, C et D. Nous les résolvons d'abord pour nous plonger dans les problèmes eux-mêmes. Ensuite, nous analysons comment les tâches elles-mêmes correspondent au concept de l'ERM.

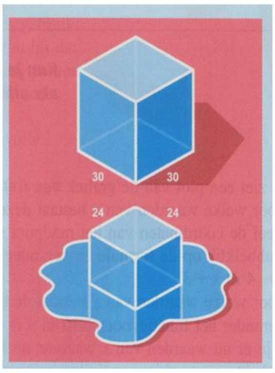
Pour analyser les 4 exercices, nous posons les questions suivantes :

1. Classez les exercices A, B, C et D du plus au moins approprié pour stimuler la compétence mathématique (voir paragraphe 3.2).
2. Pourquoi pensez-vous que le devoir ... va stimuler la compétence mathématique des élèves ?
    - le plus ?
    - le moins ?

Exercise A

Un glaçon avec des arêtes de 30 mm commence à fondre lentement. Chaque minute, les arêtes deviennent plus courtes de 1,5 mm. Le volume du glaçon est décrit par la formule :
$V = (30 - 1{,}5t)^3$ où V est le volume en millimètres cubes et t le temps en minutes.

a. Calculez le volume du glaçon à $t = 0$.
b. Quelles sont les valeurs significatives pour t ? Et pour V ?
c. Tracez et esquissez la partie du graphique où les deux variables ont une signification.
d. Suivez le curseur sur le graphique et déterminez après combien de minutes le volume est inférieur à 10 000 mm³.
Donnez votre réponse avec une précision d'une décimale.



Exercise B

La température d'une chambre froide est donnée par la fonction suivante:

$$T(t) = \frac{3t^2 - 6t + 3}{t^2 - 2t + 2}$$

T = température (°C); t = temps (en heures); t = 0 correspond à 3 heures due matin.

a. Tracer le graphique de cette fonction
b. Si la température descend en dessous de 1 °C, les aliments risquent d'être endommagés. Pendant combien de temps la température est-elle restée inférieure à 1 °C ? De quand à quand ?
c. Quand la température a-t-elle recommencé à augmenter ?
d. À quelle température le stockage au frais évolue-t-il ?

Exercise C

La pelouse dans le jardin de M. Jones mesure 15 sur 20 mètres. M. Jones décide d'agrandir la pelouse. Il ajoute une bande de même largeur de x mètres sur deux côtés. (Voir Figure 7.16.)

a. Montrez que la surface de la pelouse agrandie est donnée par $Aire = x^2 + 35x + 300$
b. La nouvelle pelouse a une surface de 374 m². Établissez une équation et calculez la largeur de la bande.

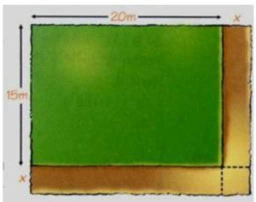


Fig. 7.16

Exercise D

M. Kok a une pelouse de 16 m sur 40 m. Sa tondeuse coupe une bande de 40 cm de large. Il commence à tondre par l'extérieur et suit le périmètre. Après combien de tours a-t-il tondu la moitié de la surface ?

B. Solution d'exercices

Nous incluons les solutions des exercices en annexe 6.

C. Conclusion

Si nous analysons les différentes tâches, nous arrivons à classer les exercices de D à B en passant par A et C :

- Nous pouvons appeler les exercices tels que A et C des exercices "packagés". L'auteur de l'exercice est parti d'un exercice mathématique simple et l'a recouvert d'une couverture orientée vers l'application. Ce type d'exercices ne montre en aucun cas comment les mathématiques sont appliquées dans la réalité. Au contraire, il donne l'impression que les mathématiques ne découlent pas du tout des problèmes que l'on peut rencontrer dans la vie. Elles ne contribuent pas à une meilleure compréhension de la réalité.
- L'exercice B est un peu meilleur. La fonction est un bon modèle pour la température d'une chambre froide.
- L'exercice D est un problème plus authentique bien qu'il soit encore simplifié.

Quelques notes sur cette tâche :

Au cours de l'atelier ProTEEM, une discussion intéressante sur l'exercice C concernant le contexte de l'extension de la pelouse a eu lieu. Dans le contexte de l'agriculture en Belgique, il n'est guère possible qu'un agriculteur décide soudainement d'étendre son champ puisque la plupart (sinon la totalité) des terres agricoles appartiennent à quelqu'un. En revanche, en Zambie, un agriculteur peut disposer d'une parcelle et décider d'en cultiver une partie, puis attendre un certain temps avant d'en cultiver une autre. Dans ce type de contexte, un exercice comme C devient donc plus réaliste.

Une deuxième remarque est que nous avons généralement besoin de fonctions en pièces détachées (la fonction a différentes expressions pour différentes parties du domaine) pour modéliser un problème réaliste. Cependant, pour de nombreux élèves de l'enseignement secondaire, les tâches avec des fonctions par morceaux sont un pont trop loin.

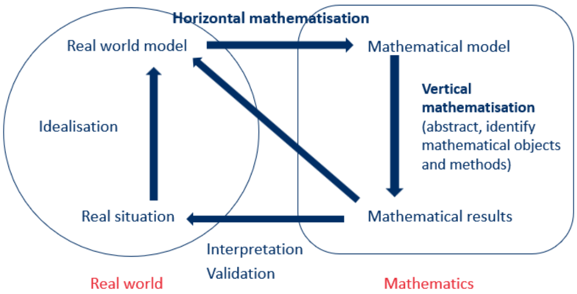
Les problèmes authentiques devraient être régulièrement intégrés dans les cours de mathématiques. Ils sont nécessaires pour permettre aux élèves d'expérimenter la relation subtile entre la réalité et les mathématiques et d'apprendre à la gérer (par exemple, en examinant la solution de manière critique). Ils permettent aux élèves de voir l'omniprésence, l'applicabilité et la beauté des mathématiques et les motivent à long terme. Même s'ils sont trop difficiles à résoudre, il est intéressant de montrer aux élèves à quoi servent les mathématiques. Nous simplifions les exercices pour rendre les mathématiques accessibles au niveau secondaire car les connaissances à ce niveau ne sont pas suffisantes pour résoudre ce type de problèmes réels.

5.4 L'omniprésence, l'applicabilité et la beauté des mathématiques

Nous pouvons façonner l'éducation de manière que les élèves apprennent l'omniprésence, l'applicabilité et la beauté des mathématiques de la manière suivante

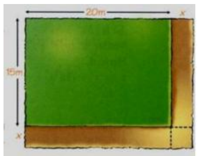
- trouver des problèmes/phénomènes qui nécessitent une approche mathématique, où les mathématiques sont vraiment utiles ("phénoménologie didactique")
- Relier les trains de pensée mathématiques à des phénomènes du monde physique, social, mental, ... des élèves.
- Faire prendre conscience aux élèves de la manière dont les mathématiques peuvent aider à organiser et à structurer les problèmes du monde réel.
- En tant qu'enseignant, prendre en compte les aptitudes, les compétences et les intérêts (monde) des élèves.

Nous soulignons l'importance du **principe de réalité** (l'un des principes de base de l'Enseignement Réaliste des Mathématiques). Les élèves doivent considérer les devoirs comme ‘réalistes’. Ce qui est ‘réaliste’ dépend de l'âge, des connaissances préalables..., bref de la situation initiale des élèves. Les phénomènes mathématiques doivent être liés au monde des élèves (c'est-à-dire le monde réel, le monde imaginaire, le monde mathématique) afin qu'ils puissent leur donner un sens et se rendre compte de ce qu'ils font. En outre, les tâches doivent être réalisables dans la pratique éducative afin que les élèves se sentent compétents pour les accomplir. C'est le C, un pilier important des trois besoins psychologiques universels de base, l'ABC, qui est la clé de la motivation à long terme, du développement personnel et du bien-être émotionnel des jeunes : Autonomie, Appartenance (Belongingness en anglais) et Compétence.



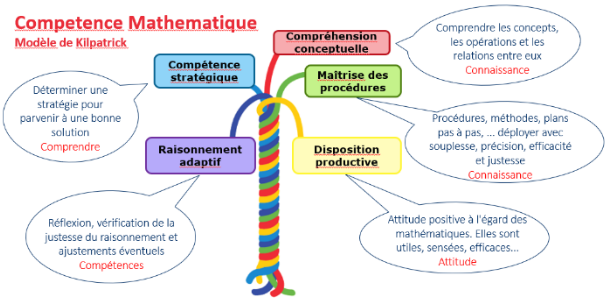
Si nous utilisons des exemples du monde réel, la question de la modélisation mathématique se pose. Gabriele Kaiser a développé le cycle de modélisation entre le monde réel et les mathématiques. Le schéma de droite illustre la procédure. Nous partons d'une situation réelle. La première étape consiste à comprendre le problème, ce qui signifie que les élèves doivent identifier et comprendre le problème réel. Ensuite, cette situation est idéalisée (voir la flèche qui pointe vers le haut du cercle), c'est-à-dire simplifiée ou structurée pour obtenir un modèle du monde réel. Les élèves doivent faire des hypothèses et simplifier le problème pour le rendre gérable. Ce modèle du monde réel est ensuite mathématisé, c'est-à-dire traduit en termes mathématiques pour aboutir à un modèle mathématique de la situation initiale. On parle de "mathématisation horizontale". Le modèle mathématique est désormais un problème qui peut être résolu à l'aide de méthodes mathématiques appropriées. Les élèves doivent utiliser des concepts, des procédures, des méthodes, des cheminements de pensée mathématiques pour résoudre le problème mathématique qui produit des résultats mathématiques (voir la flèche qui pointe vers le bas dans la forme rectangulaire). On parle de "mathématisation verticale". Ces résultats mathématiques doivent être réinterprétés dans la situation réelle. Les élèves doivent replacer la solution mathématique dans le contexte du problème réel. Enfin, l'adéquation des résultats doit être vérifiée, c'est-à-dire validée. Dans le cas d'une solution insatisfaisante, ce qui arrive assez fréquemment dans la pratique, ce processus doit être itéré. Les élèves doivent donc vérifier si la solution a un sens dans le contexte réel et affiner le modèle si nécessaire (les flèches diagonales et horizontales pointent des mathématiques vers le monde réel).

Nous plaçons les exercices C et D dans le modèle de Kaisers et vérifions si les élèves passent par toutes les étapes du cycle de modélisation.
Dans l'exercice D, la situation réelle est que nous voulons tondre une pelouse. Le modèle du monde réel choisit la forme de la pelouse comme étant un rectangle et la tondeuse à gazon peut tondre parfaitement avec des angles droits et suivre les côtés des rectangles consécutifs à chaque fois... Le modèle mathématique est un croquis de la pelouse sur lequel sont indiquées toutes les informations données. Au cours de la mathématisation verticale, nous définissons la variable x (comme le nombre de tours que la tondeuse doit effectuer), nous utilisons la formule de l'aire d'un rectangle, nous utilisons les informations données pour créer une équation quadratique et la résoudre. On obtient ainsi des résultats mathématiques que l'on doit interpréter et valider. Dans l'exercice D, nous devons exclure la solution $x = 61{,}93$ car elle crée un conflit avec les dimensions de la pelouse.



Dans l'exercice C, il n'y a pas de départ avec la situation réelle et la mathématisation horizontale est déjà faite puisque la figure donne le modèle mathématique avec même le choix de la variable x.
Dans l'exercice D, cette mathématisation horizontale fait partie de l'exercice à faire par l'élève. C'est une étape que beaucoup d'élèves trouvent difficile. S'ils ne peuvent pas s'exercer suffisamment sur la mathématisation horizontale, ils n'apprendront jamais à la faire eux-mêmes.

Par conséquent, les enseignants devraient prêter attention aux exercices dans lesquels la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale ont lieu. Dans les contextes où des devoirs peuvent être donnés aux élèves, nous conseillons même de donner suffisamment de temps en classe pour travailler sur la mathématisation horizontale et de laisser la mathématisation verticale qui a beaucoup à voir avec le suivi des procédures pour les devoirs.



Cela favorise la compétence mathématique des élèves.

Nous plaçons les exercices C et D à côté du modèle de Kilpatrick. Dans l'exercice C, les élèves entraînent principalement leur fluidité procédurale. La compétence stratégique, le raisonnement adaptatif et la disposition positive sont entraînés, mais dans une moindre mesure. L'exercice D repose beaucoup plus sur la compétence stratégique, le raisonnement adaptatif, la compréhension conceptuelle et la disposition positive que l'exercice C.

Nous concluons ce chapitre par un conseil visant à améliorer les compétences verbales des élèves : Laissez-les communiquer les résultats et le processus à la classe ou à une partie de la classe. Ce chapitre est bien sûr étroitement lié au chapitre suivant sur la résolution de problèmes.

Nous renvoyons à l'article de l'annexe 5 (van de Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014) form the *Encyclopedia of Mathematics Education,* p.521-525) pour en savoir plus sur l'ERM. Dans cette même annexe, Tom Lowie parle, aux pages 532 et 534, de "l'enseignement des mathématiques dans les zones rurales et isolées". Cet article pourrait intéresser les participants à ProTEEM. Il mentionne les technologies de la communication comme une opportunité possible pour l'enseignement à distance. Ainsi, le chapitre 4 sur GeoGebra et le chapitre 9 sur l'intégration des TIC pourraient être utiles à explorer dans le cadre d'un enseignement à distance.

6 Résolution de problèmes

6.1 Savoir ce qu'est un problème.

Les professeurs de mathématiques ne se rendent souvent pas (plus) compte de ce qu'est un vrai problème, surtout lorsqu'ils enseignent des sujets similaires et donnent des exercices similaires depuis longtemps. Ils sont tellement habitués aux exercices qu'ils font en classe avec leurs élèves, dont ils connaissent les réponses presque par cœur, qu'ils expérimentent rarement, voire jamais, la manière d'aborder un nouveau problème. C'est pourquoi nous commençons la leçon sur la résolution de problèmes en présentant un problème que, espérons-le, personne ou suffisamment d'élèves ne connaissent pas. Après tout, un problème est une tâche, une question, un exercice... pour lequel on ne sait pas immédiatement comment trouver une solution.

A. Le problème

L'enseignement est le suivant. Les élèves travaillent par deux pendant 20 minutes. Une personne résout le problème donné ci-dessous. L'autre personne observe et note quels réflexes et méthodes mathématiques sont utilisés pour résoudre le problème.

Le problème :

Le sol d'une pièce rectangulaire est recouvert de carreaux carrés (entiers). La pièce a une largeur de m carreaux et une longueur de n carreaux. La moitié des carreaux sont sur le bord. Pour combien de tailles de pièces cela est-il possible ??

(A) aucun (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) plus de 3

(Référence : Volume de l'Olympiade flamande de mathématiques1996, Round 2, question18)

L'observateur obtient la liste suivante de réflexes et de compétences mathématiques possibles (n'hésitez pas à compléter la liste)

1. Travailler avec des cas concrets : raisonner à partir d'un exemple.
2. Prévoir. Au début du problème, vous pouvez réfléchir à «l'objet mathématique» que devrait être le résultat : un nombre avec ou sans unités, un rapport, une fonction, une réponse oui/non, une preuve, etc. Vous pouvez vous y référer lors de la formulation de la décision.
3. Vérifiez que vos conclusions ne sont pas trop spécifiques (par exemple, uniquement pour l'exemple choisi).
4. Une propriété n'est pas valable dès que l'on peut donner un contre-exemple. Une propriété n'est valable que si elle s'applique à toutes les situations.
5. Lorsqu'on vérifie une propriété, il faut le faire avec différents types d'exemples.
6. Il ne suffit pas de vérifier des exemples pour démontrer une affirmation. Dans une phase ultérieure, vous avez également besoin d'une preuve générale.
7. Généraliser en introduisant des variables.
8. Construire un raisonnement logique.
9. Rechercher les erreurs et les analyser.
10. Vérifier si je fais bien en revoir: ma solution conduit-elle à la réponse à la question ?
11. Faire preuve d'esprit critique : ai-je couvert toutes les options ? Puis-je trouver une explication aux résultats obtenus ? Les formules utilisées sont-elles correctes ?
12. Élaboration d'un tableau.
13. Interprétation d'une réponse (puis-je avoir toutes les valeurs possibles pour un nombre, cette fonction existe-t-elle partout...).
14. Utilisation de la symétrie.
15. Utilisation de la compréhension de l'espace.
16. Réfléchir aux connaissances que je peux utiliser : Lorsque vous parcourez vos connaissances, vous pensez aux parties des mathématiques que vous pouvez utiliser pour résoudre le problème (algèbre, géométrie, analyse, etc.) et plus spécifiquement aux théorèmes, aux propriétés que vous

pouvez utiliser (triangles congruents, Pythagore, résolution d'un système, création d'un graphique, résolution d'une inégalité...).
17. Vous pouvez d'abord vous attaquer à une version simple du problème, puis essayer de le généraliser.
18. Raisonnement à l'envers.
19. Lors de l'élaboration d'une preuve, la technique suivante peut vous aider davantage : "partez de ce qui est donné, partez de ce qui doit être prouvé, travaillez dans les deux sens en même temps, jusqu'à ce que les deux arguments se "rencontrent".
20. Un dessin (sur papier ou avec un logiciel de dessin dynamique) n'est pas une preuve. Si vous dessinez une situation géométrique de manière précise et aussi générale que possible, vous pouvez en extraire des indices pour une preuve.
21. Utilisation du matériel : on peut parfois essayer de résoudre des problèmes géométriques avec du papier et des ciseaux.
22. Faire des prévisions.
23. Travailler psychologiquement (avoir ou non confiance en ce que l'on fait).
24. Les notations correctes sont importantes dans les rapports : $3 + 2 = 5 + 7 = 12$ est un exemple de ce qu'il ne faut pas faire. Vérifiez vos notations.
25. Heuristiques : dessiner une image ou faire une figure, entrer de bonnes notations, structurer les éléments du problème, connaître et examiner un problème connexe, analyser les données/demandes, formuler le problème différemment, quelles données sont redondantes, résoudre une partie du problème, travailler de l'arrière vers l'avant, considérer d'abord un cas spécial, examiner les cas extrêmes, traduire le problème dans une représentation plus appropriée, abandonner une condition...
26. Essai et erreur.
27. …

B. Solution dus problème

Nous incluons la solution du problème en annexe 7.

6.2 Comment apprendre aux élèves à résoudre un problème ??

La partie principale de la leçon est d'abord une discussion sur la façon dont les élèves arrivent (ou n'arrivent pas) à la solution. Car 20 minutes, c'est très court pour s'attaquer à un vrai problème. Il est plus probable que le duo n'ait pas trouvé de solution. Mais la question est de savoir comment le résolveur a procédé. Qu'a remarqué l'observateur ? Quelle heuristique l'élève a-t-il utilisée pour tenter de résoudre le problème ? Quelles compétences en matière de résolution de problèmes ont été observées ? Deuxièmement, un brainstorming sur la question "Qu'est-ce qui est essentiel dans la résolution de problèmes ?" rassemble les idées des élèves sur la base de leurs expériences ?

Selon Schoenfeld (Référence: *A. H. Schoenfeld, Mathematical problem solving, Academic press, 1985)* les compétences ou conditions suivantes sont nécessaires pour pouvoir résoudre un problème :

- Base de connaissances : il faut disposer d'un bagage substantiel (ressources), c'est-à-dire d'une connaissance des définitions, des propriétés, des techniques et des méthodes fréquemment utilisées, mais aussi d'une vision et d'une intuition du matériel d'apprentissage concerné.
- L'heuristique de résolution des problèmes. Il s'agit de conseils, de méthodes ou d'idées (internes) qui augmentent les chances de trouver la solution, mais sans garantie de succès. Ils sont **généraux**, ce qui signifie qu'ils ne se rapportent pas à un élément spécifique du matériel d'apprentissage. Les heuristiques les plus importantes sont indiquées au point 25 de la liste du paragraphe A.
- Surveillance et contrôle (métacognition) : Une personne qui résout des problèmes doit gérer le processus de solution de manière agile. Plutôt que de travailler comme une poule mouillée, il doit

planifier, procéder à une évaluation intermédiaire au cours du processus, prendre des décisions pour, par exemple, repartir à zéro... De cette manière, il doit en fait combiner les heuristiques utilisées et son expérience en matière de contenu. Comme indiqué ci-dessus, les heuristiques sont générales et doivent être interprétées différemment et de manière appropriée pour chaque problème. La liste des heuristiques est vaste et toutes les heuristiques ne sont pas intéressantes à utiliser pour chaque problème. La sélection des bonnes heuristiques est une compétence qui est fortement liée aux connaissances mathématiques.

- Croyances et sentiments : Ils jouent un rôle dans la tête de la personne qui résout un problème. Croyances ou opinions sur l'utilité des mathématiques et de ce qui a été appris dans les cours de mathématiques précédents comme aide à la recherche d'une solution à un problème. Par exemple, si les élèves ont appris les cas de congruence des triangles pendant le cours, ils peuvent ne pas penser qu'ils peuvent aider à la recherche d'un problème, de sorte qu'il s'agit d'une connaissance mathématique utile même longtemps après qu'ils aient réellement appris à la connaître pendant les cours. Il est donc important d'activer les connaissances antérieures, non seulement pour les leçons récentes mais aussi pour les leçons des années précédentes, lors de la résolution de problèmes. Les croyances ou les opinions sur ce que l'on attend des élèves sont un autre élément important qui joue un rôle dans la résolution des problèmes. Par exemple, l'abandon trop rapide de la recherche en raison de la croyance selon laquelle "trouver quelque chose soi-même = génie". De nombreuses personnes pensent que les mathématiques sont réservées aux génies et ne commencent même pas à lire attentivement dès qu'elles savent qu'il s'agit d'un problème mathématique. Cela correspond fortement aux sentiments des élèves. Jusqu'à quel point se décourage-t-on "si ça ne marche pas tout de suite", jusqu'à quel point a-t-on confiance en ses propres capacités ?

Jusque dans les années 1980, on pensait qu'il suffisait d'être compétent en matière de connaissances et de procédures mathématiques et d'utiliser des heuristiques pour être en mesure de résoudre efficacement les problèmes. Le livre "How to solve it" de Polya (1945) mentionnait un ensemble d'heuristiques. La recherche a montré l'importance de la métacognition et des croyances. La théorie de Schoenfelds date de 1985, le modèle de Kilpatrick de 2001.

La théorie de Schoenfelds est en ligne avec le modèle de Kilpatrick que nous avons abordé au chapitre 3. Disposer d'une bonne base de connaissances renvoie aux volets de la compréhension conceptuelle et de la maîtrise des procédures. La capacité à utiliser l'heuristique est une compétence qui s'inscrit dans le cadre de la compétence stratégique. Le suivi et le contrôle du processus de solution est exactement ce que signifie le raisonnement adaptatif. Enfin, les croyances et les sentiments s'inscrivent dans le cadre de la disposition productive.

Qu'est-ce que cela signifie pour les cours de mathématiques et les enseignants ? Apprendre à résoudre de vrais (nouveaux) problèmes prend du temps et est possible dans une certaine mesure. Nous ne pouvons pas nous attendre à ce que tous les élèves (et même pas tous les enseignants) soient capables de résoudre de vrais problèmes difficiles, des problèmes que les mathématiciens résolvent pour soutenir la société dans laquelle nous vivons, les problèmes du monde réel. Mais les enseignants peuvent garder à l'esprit les lignes directrices suivantes :

- Fournir des devoirs réalisables et stimulants en différenciant suffisamment !
- Mettre l'accent sur les heuristiques lorsqu'elles sont utilisées
- Fournir des exercices dans lesquels les élèves doivent utiliser leurs compétences en matière de surveillance et de contrôle. Par exemple, fournir des solutions à des problèmes où les élèves doivent vérifier ce qui ne va pas, pourquoi les étapes sont correctes...
- Tenir compte des opinions et des sentiments ! Les opinions et les sentiments peuvent changer à la suite d'expériences au cours desquelles les élèves acquièrent une plus grande confiance en eux, par exemple en accordant de l'attention à la facilité d'utilisation des mathématiques, en veillant à ce que les élèves puissent acquérir des expériences de réussite dans la résolution de problèmes

afin qu'ils se rendent compte qu'ils sont capables de résoudre des problèmes eux-mêmes, en apprenant que les mathématiques ne sont pas "finies" et que chaque processus de recherche est utile et peut conduire à des choses nouvelles et intéressantes.

Nous introduisons le concept de questions ouvertes et fermées pour donner des idées sur la manière de différencier.

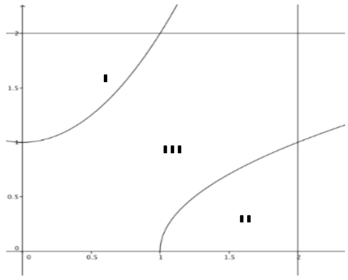
6.3 Questions ouvertes et fermées.

A. Exemples

Nous examinons l'exercice suivant qui peut être résolu de différentes manières. C'est pourquoi il est très intéressant de le présenter comme une question ouverte à la classe. Il s'agit d'une question où seule la mathématisation verticale intervient.

Nous la formulons en une question ouverte et une question fermée.

L'exercice comme question ouverte



Dans la figure, vous voyez les graphiques de $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$ et les lignes $x = 2$ et $y = 2$. Trois aires peuvent être distinguées : I, II et III. Déterminez l'aire de chacune des trois zones I, II et III de (au moins) deux manières différentes.

Faites preuve de créativité!

Exercice révisé en question fermée

Dans la figure, vous voyez les graphiques de $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$ et les lignes $x = 2$ et $y = 2$. Dans ces formules, trois aires peuvent être distingués à l'intérieur du carré formé par le positif x-axe et le y-axe et les lignes $x = 2$ et $y = 2$: I, II and III.

a) Argumenter que l'aire de l'aire I est égale à l'aire de l'aire II.

b) Déterminez l'aire de chacune des trois aires I, II et III d'au moins deux façons différentes. Soyez créatifs !

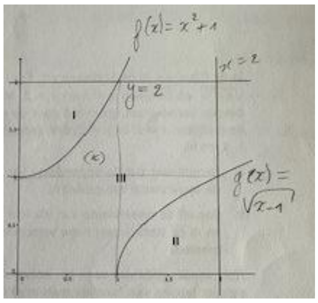
Conseil : utilisez votre réponse à la question a) et les propriétés des fonctions telles que la fonction inverse, la symétrie, etc.

Il y a plusieurs façons de présenter ces exercices en classe. Nous vous proposons quelques possibilités:

1. Diviser la classe en 2 groupes (ou plus selon le nombre d'élèves). Donnez à la moitié des groupes soit la question ouverte, soit la question fermée.
2. Divisez la classe en paires. Chaque paire peut décider de résoudre la question ouverte ou fermée.
3. Pour la question fermée : Vous pouvez donner l'astuce tout de suite ou laisser les élèves qui ont des difficultés demander une astuce quand c'est nécessaire.
4. Laissez les élèves qui ont résolu la question fermée présenter leurs solutions.

Solution

Étant donné que l’aire I = aire II, il suffit de trouver l'une des deux zones. Cela peut se faire de différentes manières. Par exemple.



Aire I = Aire d’un rectangle de largeur 1 et de longueur 1 - $\int_0^1 x^2\,dx = 2 - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Donc aire I = aire II = $\frac{2}{3}$

Aire III = Aire du carré de côté 2 – I – II = $4 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

Dans cette solution, nous déplaçons la parabole $y = x^2$ et la ligne droite $y = 2$ une unité vers le bas sur le système de coordonnées pour calculer la surface. Nous choisissons de calculer l'aire I, car l'intégration d'une fonction quadratique est plus facile que l'intégration d'une fonction irrationnelle.

Une deuxième possibilité de calculer la surface I est d'utiliser la formule de calcul d'une surface entre 2 graphiques.

$$\int_0^1 (2 - x^2 + 1)\,dx = \int_0^1 (1 - x^2)\,dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Ces 2 méthodes nous semblent les plus simples. Toute autre division ou découpage des aires en morceaux conduira à des intégrales plus compliquées.

Aux directives du paragraphe précédent, nous ajoutons les suivantes :

- Fournir des devoirs réalisables et stimulants en différenciant suffisamment ! Concevoir des problèmes avec une formulation ouverte ou fermée.
- Fournir une variante fermée du travail pour les étudiants dont les compétences en matière de résolution de problèmes n'ont pas encore été suffisamment développées.
- Donner aux élèves suffisamment de temps pour explorer et former leur "train de pensée mathématique" (voir 5.4), c'est-à-dire la progression logique des idées et des étapes de raisonnement qu'une personne suit lorsqu'elle résout un problème mathématique ou qu'elle explore un concept mathématique. Encore une fois, pour chaque exercice présenté en classe, cela implique :
  1. Identifier le problème : comprendre ce qui est demandé.
  2. Recueillir des informations : Recueillir les données pertinentes, les formules et les valeurs connues.
  3. Formuler un plan : Décider des méthodes et des étapes nécessaires pour résoudre le problème.
  4. Exécuter le plan : Effectuer des calculs et appliquer des principes mathématiques.
  5. Examiner la solution : Vérifier l'exactitude et la cohérence des résultats.

  Par exemple, si vous résolvez une équation quadratique, votre raisonnement pourrait consister à reconnaître la forme standard de l'équation, à décider comment résoudre l'équation (utiliser la formule quadratique ou la méthode utilisant les formules de somme et de produit ou une méthode directe lorsque b ou c sont nuls), à substituer les coefficients dans la formule, à résoudre les racines et à vérifier les solutions en utilisant la formule quadratique.

  Nous remarquons que les étapes 1, 2, 3 et 5 sont souvent effectuées avec l'ensemble de la classe. Les élèves ne peuvent alors qu'exécuter le plan qui fait appel à leurs connaissances conceptuelles et stratégiques. Ainsi, même dans le cadre de la mathématisation verticale, nous conseillons le numéro 4 pour les devoirs.

Référence: *A. H. Schoenfeld, Mathematical problem solving, Academic press, 1985*

7 Méthodes d'enseignement

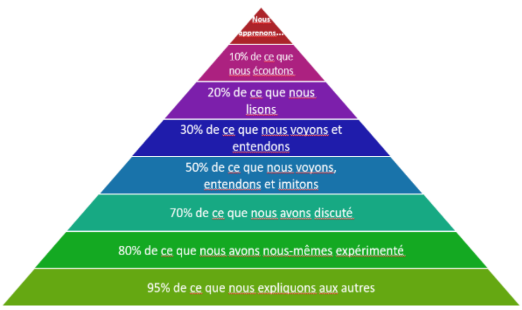
7.1 Quelle méthode d'enseignement ?

En fonction de la situation initiale, des objectifs de la leçon et du contenu de l'apprentissage, une méthode d'enseignement peut être plus appropriée qu'une autre. En outre, les élèves diffèrent dans leur manière d'acquérir la matière (leur style d'apprentissage) et dans les méthodes qui leur conviennent. Il est donc important de varier les méthodes d'enseignement.

Tiré de Meeus, W. & Verbeeck, G. (2016). Didactisch referentiekader (2ème édition). ACCO pp. 95-96, nous soulignons les citations suivantes:

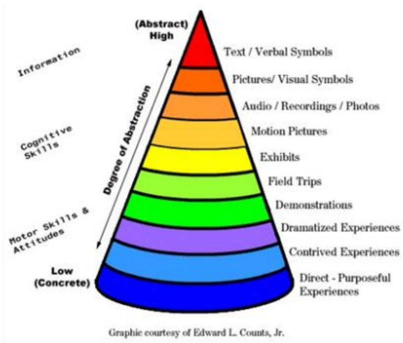
- L'éducation activante est une éducation qui réussit à amener les élèves à traiter activement le matériel.
- L'éducation activante est une éducation qui encourage l'apprentissage actif, où le matériel est acquis à un niveau plus profond et reste stocké dans le cerveau plus longtemps. C'est ce qu'on appelle le principe didactique de l'activité.
- Le degré d'activation que l'enseignant peut atteindre grâce à une méthode d'enseignement est principalement lié à la qualité de sa didactique.
- Chaque méthode d'enseignement a le potentiel de promouvoir l'apprentissage actif, tout comme chaque méthode peut rester au niveau d'une tâche fastidieuse.

Le schéma suivant est utile pour évaluer la qualité de la didactique et déterminer si l'activité en vaut la peine. Si les élèves prennent plaisir à jouer à un jeu mais n'apprennent rien de substantiel, on ne peut pas parler d'une bonne méthode d'enseignement activante.



Le schéma de gauche est connu sous le nom de pyramide d'apprentissage de Bales. Il n'est pas le résultat d'une recherche mais est basé sur des expériences personnelles (sujettes à notre propre style d'apprentissage), nous le présentons comme un modèle pour réfléchir à la didactique utilisée dans la leçon. Cependant, le contenu et les chiffres de ce modèle sont complètement inventés. Il est issu d'un cône qu'Edgar Dale a présenté en 1946, mais il a pris une vie propre.

Pour votre information, nous vous fournissons l'origine : un cône d'expérience d'Edgar Dale en 1946, résumant et organisant divers types d'apprentissage indirect du concret à l'abstrait. Le cône a pris une vie propre et a abouti à ce qui précède.



7.2 Enseignement

"Le cours magistral est une méthode d'enseignement qui remonte à l'époque où les livres avaient une telle valeur qu'il fallait les enchaîner dans la bibliothèque. À cette époque, il était nécessaire de transmettre les connaissances par l'intermédiaire du "médium" qu'est l'enseignant. (T. Geerligs & T. van der Veen)

L'enseignement magistral est une méthode par laquelle l'enseignant transmet verbalement des informations ou des connaissances à un groupe d'élèves. La communication est donc unilatérale, de l'enseignant vers les élèves, sans interaction. Un clip de connaissances dans lequel l'enseignant explique un sujet spécifique relève également de la méthode des cours magistraux. La seule différence est que les élèves peuvent mettre la vidéo en pause et la revoir eux-mêmes.

Cette méthode présente plusieurs avantages si elle est bien exécutée. L'enseignant peut transmettre des connaissances de manière structurée en peu de temps. Elle convient donc parfaitement pour transmettre rapidement les mêmes informations aux élèves. C'est également une méthode très sûre. L'enseignant peut tout préparer en détail. En raison de l'absence d'interaction, la probabilité de circonstances imprévues pendant le cours est limitée. Cela est naturellement lié à une bonne gestion de la classe, où le groupe reste silencieux pendant que l'enseignant fait son cours. Avec la communication à sens unique, l'enseignant a tout sous contrôle et peut travailler de manière très structurée. Cette méthode est facilement utilisable pour les grands groupes. Elle peut convenir pour expliquer un élément théorique spécifique, pour faire une démonstration et en expliquer toutes les étapes, ou pour montrer comment l'enseignant résout un exercice. Dans ce dernier cas, le processus de réflexion du spécialiste peut être intéressant pour les élèves. Une mise en garde s'impose : l'enseignant ne doit pas s'attendre à ce que les élèves se contentent de copier ce qui a été démontré.

Le principal inconvénient de cette méthode est qu'en raison du manque d'interaction, il est presque impossible de savoir si certains élèves n'ont pas compris ou ont raté certaines parties. L'enseignant dépend d'une interprétation subjective du comportement des élèves. L'attention des élèves peut également fluctuer considérablement et ils peuvent se désengager. Cette attention diminue généralement après 10 minutes de cours, voire plus rapidement pour certains. En fin de compte, de nombreux élèves se souviennent moins bien, à long terme, des informations obtenues par le biais d'un cours magistral que des informations acquises de manière plus active. Étant donné que la compréhension de la matière est cruciale pour un cours de mathématiques, l'enseignement magistral n'est pas une méthode efficace pour la plupart des élèves, en particulier pour les moins motivés d'entre eux.

Points d'attention et pièges:

- Veillez à une très bonne structure. Esquissez régulièrement le cadre du discours et expliquez tout ce qui s'y trouve.
- Maîtriser le contenu à fond et avec la profondeur nécessaire.
- Pratiquez le moment de l'exposé pour expliquer toutes les transitions de manière claire et distincte.
- Respecter le principe didactique de la "visualisation" et soutenir visuellement l'explication. Affichez un diagramme, des mots clés ou des formules sur le tableau ou la projection,
- La durée d'un cours magistral dépend du niveau et de l'âge des élèves. Une durée de 5 à 7 minutes est une bonne ligne directrice pour l'enseignement secondaire. Dans un cours de 45 minutes, nous conseillons à l'enseignant de parler au maximum 1,5 minute par année d'âge des élèves.
- Faites preuve d'empathie à l'égard de vos élèves lorsque vous vous préparez : comment pouvez-vous capter et maintenir leur attention ? Anticipez les problèmes éventuels des élèves lors de la préparation.

- Mettez en avant votre talent d'acteur. Un enseignant enthousiaste retient beaucoup plus facilement l'attention que quelqu'un qui ne semble pas croire en son cours ou en son sujet. Ne dites jamais que vous présentez une partie ennuyeuse du sujet.
- Surveillez le langage corporel des élèves. Les élèves qui rompent le contact visuel se désengagent généralement.
- Vérifiez si les élèves répondent aux attentes suivantes : écoutent-ils bien ? Prennent-ils de bonnes notes ? Sont-ils en mesure d'assimiler la matière de manière autonome après le cours afin de tout comprendre ?

7.3 Dialogue éducatif Structuré (DES)

"Une conversation DES est une conversation pré-structurée par l'enseignant au cours de laquelle les élèves sont progressivement amenés à certaines idées par le biais de questions et de réponses." (Meeus, W. & Verbeeck, G. (2016). Didactisch referentiekader (2e édition), ACCO p. 81). La réussite d'une conversation pédagogique dépend d'une bonne préparation et d'une bonne orientation de la part de l'enseignant. "Trois conditions doivent être remplies : de bonnes questions ; de bonnes techniques de questionnement ; un bon traitement des réponses." (p. 81-82) En outre, "créer un climat positif" et "impliquer tous les élèves" sont des compétences que l'enseignant débutant ne maîtrise souvent pas encore.

A. Les bonnes questions

Réfléchissez à l'avance à la formulation de bonnes questions, écrivez-les dans la structure de la leçon du formulaire de préparation de la leçon. Elle constitue la préparation de la méthode (DES) en tant qu'activité d'enseignement et d'apprentissage.

- Préparez des questions cruciales pour les étapes/concepts que les élèves trouvent difficiles. Ce sont les questions les plus difficiles à préparer. Pour cela, vous devez avoir fait des recherches approfondies sur le contenu.
- Les questions doivent être suffisamment spécifiques. C'est-à-dire des questions qui indiquent une direction dans laquelle l'élève doit chercher une réponse. Les questions vagues sont, par exemple, les suivantes "Qu'est-ce que cela signifie ? Que voyez-vous ? À quoi cela vous fait-il penser ?"
- Préparez des questions claires auxquelles les élèves peuvent répondre parce qu'ils possèdent les connaissances préalables nécessaires.
- Travaillez selon un modèle en deux étapes : commencez par une question un peu plus difficile (question principale) et gardez des "questions d'aide" en réserve. Si les élèves ne connaissent pas la réponse à la question difficile, vous pouvez leur donner un coup de pouce de cette manière.
- Formulez la réponse correcte que vous attendez à chaque fois (tant pour les questions principales que pour les questions d'aide).
- Réfléchissez aux mauvaises réponses que les élèves pourraient donner pour chaque question et à la manière dont vous réagirez à ces erreurs.
- Réfléchissez à la manière dont vous réagirez si aucun élève ne peut répondre à votre question.
- Ne posez pas de questions où les élèves doivent deviner.
- Ne posez pas de questions de type oui/non.

Les compétences suivantes sont acquises au cours de l'enseignement. En réfléchissant brièvement après chaque leçon, on évolue plus rapidement.

B. Bonnes techniques de questionnement

- Laissez aux élèves le temps de réfléchir à une question. Vous devez pouvoir tolérer le silence. Comptez jusqu'à 10 dans votre tête, ce qui donne une indication de 10 secondes.

- Ne cherchez pas à obtenir une seule réponse. La conversation pédagogique ne doit pas devenir un "devinez le mot que j'ai en tête". Soyez suffisamment souple avec la terminologie (de la matière) et fournissez vous-même le mot correct (de la réponse) si vous remarquez que les élèves comprennent le concept mais n'utilisent pas le mot correct ou ne formulent pas la réponse. Le fait de répéter suffisamment les choses les aidera dans ce processus d'apprentissage de la terminologie mathématique.
- Les questions du type "Avez-vous des questions ?" ou "Avez-vous tout compris ?" conduisent rarement au comportement que vous attendez de vos élèves. En général, il n'y a pas de réponse, ce qui ne signifie pas que les élèves n'ont pas de questions et qu'ils ont tout compris. Posez des questions liées au contenu, telles que : "Expliquez cette étape", "Quelle est l'explication de cette étape ?", "Quelle méthode avons-nous utilisée ici ?", "Pourquoi cette méthode est-elle bonne ?", "Comment avez-vous commencé cet exercice ? Quelle technique avez-vous utilisée ?"...

C. Bien gérer les réponses

- Ne montrez pas (par exemple par votre expression faciale) si une réponse est bonne ou mauvaise, surtout si vous voulez en discuter en classe avec les élèves.
- Demandez à un élève d'expliquer comment il est parvenu à la réponse.
- Apportez éventuellement au tableau différentes réponses à la même question.
- Notez de manière concise les bons éléments de la réponse d'un élève au tableau. Cela permet de visualiser les contributions des élèves, de construire progressivement une réponse correcte et de soutenir la structure de la conversation.
- Ne complétez pas systématiquement vous-même les réponses minimales ou incomplètes de l'élève. Impliquez d'autres élèves dans la mesure du possible.
- Ne pas fournir une forme corrigée d'une réponse incorrecte. La faire corriger par d'autres élèves

D. Faire participer tous les élèves

- Transmettez les réponses et/ou les questions des élèves aux autres élèves. En renvoyant une question ou une réponse à la classe, vous impliquez davantage d'élèves dans la conversation. Évitez de le faire uniquement avec des réponses incorrectes. Les élèves verront dans le renvoi une façon cachée de dire que la réponse était mauvaise. En renvoyant la question, vous évitez que les élèves pensent que "si nous restons silencieux pendant un moment, l'enseignant prendra la relève".
- Veillez à ce que tous les élèves aient la possibilité de répondre.
- Veillez à ce que toute la classe entende la réponse.
- Ne communiquez pas avec un élève séparément. Faites toujours participer l'ensemble de la classe.
- Laissez un temps de réflexion après avoir posé une question (comptez jusqu'à 10) avant de désigner le premier élève à répondre. Si vous désignez un élève en premier, les autres seront moins enclins à réfléchir.
- Demandez aux élèves de discuter brièvement par deux après avoir posé une question. C'est ce qu'on appelle la méthode "penser-pair-partager".
- Demandez à vos élèves d'écrire une réponse à une question avant de prendre la parole.
- Interrompez le DES par des tâches que vous pensez que les élèves peuvent accomplir de manière autonome. C'est certainement le cas, par exemple, des travaux de routine.

E. Créer un climat positif où l'erreur est permise

- Ne répondez pas toujours vous-même : demandez aux autres élèves s'ils sont d'accord avec la réponse.
- Complimentez un élève qui donne une (bonne) réponse. Une mauvaise réponse peut également donner lieu à une activité intéressante.

- Utilisez autant que possible une bonne réponse qui s'écarte de ce que vous aviez prévu. Si vous ne l'utilisez pas : essayez d'expliquer pourquoi, en indiquant clairement que la réponse de l'élève était également bonne.
- Critiquez une mauvaise réponse, et non l'élève qui a commis l'erreur.
- Soulignez les bons éléments d'une mauvaise réponse. Utilisez la mauvaise réponse dans votre conversation pédagogique autant que possible. L'élève est peut-être en train de commettre une erreur que beaucoup d'élèves font. Profitez de ce moment pour mettre l'accent sur l'erreur elle-même : expliquez pourquoi elle est fausse, donnez-en la cause possible... Pour ce faire, il est nécessaire de connaître les connaissances préalables de l'élève.
- Demandez à l'élève d'expliquer ou de clarifier sa réponse. De cette manière, l'élève découvre parfois sa propre erreur (demandez à l'élève de présenter la réponse au tableau).
- Prenez des photos des erreurs que vous rencontrez. Vous pouvez les utiliser dans des travaux où vous demandez aux élèves de trouver et de corriger des erreurs.

La question ‘Tout le monde a-t-il compris ?’ n'est rien d'autre qu'une question rhétorique dans la plupart des situations de classe. S'assurer que tout le monde a "compris" vous conduit automatiquement à la différenciation. On se rend compte de la complexité de l'enseignement. La préparation d'un cours est une forme de casse-tête. L'enseignant dispose de nombreuses pièces de puzzle qu'il peut placer et réorganiser en fonction du contenu d'apprentissage de son groupe cible.

F. Quelques exemples de préparation à une DES dans le plan de cours

Dans ce qui suit, vous lirez quelques exemples d'un DES avec des petits tâches. Bien que la réflexion sur les réponses correctes et les réponses possibles des élèves fasse partie d'une bonne préparation de cours, nous ne l'avons pas entièrement incluse dans les exemples. Nous proposons principalement les questions (cruciales) et, ici et là, des questions supplémentaires selon le modèle en deux étapes.

Exemple 1 : dérivabilité des fonctions

Problème : rechercher la dérivabilité des fonctions dans la valeur x donnée.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{als } x \leqslant 1 \\ x^2 - 1 & \text{als } x > 1 \end{cases} \quad \text{in } 1$$

<u>DES avec des tâches</u>

1. Comment calculer $f(1)$? Montrez votre calcul.
   Réponse: $f(1) = 1 - 1^2 = 0$
   Mauvaise réponse possible: $f(1) = 1^2 - 1 = 0$
2. Comment pouvez-vous vérifier si la fonction est dérivable en 1?
   Réponse: la fonction doit être continue en 1 et les dérivées gauche et droite doivent être égales.
   Mauvaise réponse possible : ne pas indiquer la continuité. Comme il s'agit d'une technique qui a déjà été enseignée, la répétition de l'enseignement est la méthode la plus rapide pour maintenir le rythme.
3. Comment vérifier si la fonction est continue en 1 ?
   Réponse : les limites gauche et droite doivent être égales.
4. Tâche : l'enseignant divise la classe en deux groupes. Le groupe 1 calcule la limite gauche, le groupe 2 calcule la limite droite. L'élève/étudiant qui termine le premier des deux groupes apporte la solution au tableau.
   Réponse : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (1-x^2) = 0$ La fonction est continu en 1
   $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} (x^2-1) = 0$

5. Comment vérifier si la fonction est dérivable en 1?
   Réponse : les dérivées gauche et droite doivent être égales
6. Tâche : le professeur divise la classe en deux groupes. Le groupe 1 calcule d'abord la dérivée gauche puis la dérivée droite, le groupe 2 calcule d'abord la dérivée droite puis la dérivée gauche. Lorsque tout le monde a terminé la première dérivée, un élève apporte la solution au tableau afin que l'enseignant et les élèves qui ont terminé puissent vérifier les deux dérivées.
   Réponse:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{1-x^2-0}{x-1}\\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{1-x^2}{x-1}\\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}\\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ <}}(-x-1)\\ &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{x^2-1-0}{x-1}\\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{x^2-1}{x-1}\\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}\\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ >}}(x+1)\\ &= 2\end{aligned}$$

Les dérivées gauche et droite étant différentes en 1, la fonction n'est pas dérivable en 1.

Questions à poser aux élèves qui ne peuvent pas commencer :

a. Donnez la définition de la dérivée (gauche/droite).

b. Qu'est-ce que la $f(x)$?
   Réponse : pour la dérivée à gauche ($x < 1$) est $f(x) = 1 - x^2$, pour la dérivée à droite ($x > 1$) est $f(x) = x^2 - 1$
   Question d'aide: *Étant* donné $f(x)$. Quelle prescription fonctionnelle devez-vous utiliser si $x < 1$ (respectivement $x > 1$)

c. Qu'est-ce que la $f(1)$?
   Réponse: (voir ci-dessus) $f(1) = 1 - 1^2 = 0$

d. Comment calculer la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1-x^2}{x-1}$
   Questions d'aide: Remplacé 1, qu'obtenez-vous ? Comment calculer une limite à une indétermination $\frac{0}{0}$? Décomposer $1 - x^2$ en facteurs et l'inscrire au numérateur.
   Réponse: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1}$

e. Pour calculer une limite à l'indétermination $\frac{0}{0}$, nous supprimons le facteur causant le '0' au numérateur et au dénominateur. Que pouvez-vous supprimer ici ?
   Questions d'aide: Est $1 - x = x - 1$? Remplacez la variable x par un nombre, qu'obtenez-vous dans les deux membres ?
   Les réponses : Non, par exemple $1 - 3 \neq 3 - 1$ parce que $-2 \neq 2$

f. Comment pouvez-vous encore vous assurer que vous pouvez effacer ?

   Réponse: $1 - x = -(x - 1)$ ou $x - 1 = -(1 - x)$

   Pour les élèves qui ne le voient pas, l'enseignant visualise comme suit:

$$\begin{aligned}1 - 3 &= -2 = -(3 - 1)\\ 1 - x &= \qquad\;\; -(x - 1)\end{aligned}$$

g. Complétez tout ce que vous savez maintenant et faites l'exercice.

   Réponse: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)(1+x)}{-(1-x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1+x}{-1} = -2$

   OU $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-(x-1)(1+x)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -(1+x) = -2$

Remarque 1 :
Il s'agit d'une tâche non générique qui consiste à calculer la valeur de la fonction $f(1)$ car cela donne 0 dans les deux règles de fonction. Ceci est pertinent pour cet exercice car il en résulte une continuité en 1.
Dans la tâche suivante $f(-3) = 2 \cdot (-3) - 1 = -7$. En entrant -3 dans la première prescription de fonction, on obtient le mauvais résultat pour la valeur de fonction de -3, à savoir -6

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x < -3 \\ 2x - 1 & \text{als } x \geqslant -3 \end{cases} \quad \text{in } -3$$

Remarque 2:
Dans Puzzles nous décrivons une méthode d'enseignement qui peut également être utilisé ici pour l'exercice du point 6. L'enseignant découpe la solution en pièces de puzzle. La consigne est la suivante :

1. Mettez les pièces du puzzle dans le bon ordre, c'est-à-dire celui qui calcule la dérivée gauche (respectivement droite).
2. Faites vérifier votre solution par le professeur. Écrivez la solution correcte dans votre cahier et notez la justification de la justesse de l'étape à chaque étape.

Exemple 2 : Répétition sur des polynômes

L'enseignant souhaite rafraîchir les connaissances préalables des élèves sur les polynômes. Il pose les questions suivantes : "Dites-moi ce qu'est un polynôme". Qu'est-ce qu'un terme ? Les élèves ne répondent pas, c'est ce qu'on appelle la non-réponse. L'enseignant doit rendre ses questions plus concrètes.

DES

1. Donnez un exemple de polynôme.
L'enseignant note plusieurs exemples d'élèves au tableau. Il continue à travailler avec 1 ou plusieurs exemples. Si les élèves ne peuvent pas donner d'exemple, il en donne un lui-même. Cet exemple provient de préférence d'une leçon précédente où les polynômes (éventuellement aussi dans les exercices) ont été abordés. De cette façon, le principe de répétition fonctionne mieux. Les questions suivantes accompagnent l'exemple choisi (de la part des élèves ou de l'enseignant):
2. Donnez un terme de ce polynôme.
3. Combien de termes ce polynôme a-t-il?
4. Quel est le degré de ce polynôme?
5. L'enseignant indique un terme et pose la question : Quel est le degré de ce terme?
6. Comment appelle-t-on le nombre qui précède la puissance de x?

Comme les questions de l'OLG ci-dessus ont des réponses très courtes, vous pouvez également utiliser cet OLG avec les techniques d'activation abordées dans la section 7.4 A (feuilles à gratter ou ardoise effaçable).

Exemple 3 : Définition de la divisibilité en $\mathbb{R}[x]$

L'enseignant veut appliquer la définition donnée dans l'image suivante du manuel mis à la disposition des élèves. Le livre va du concret à l'abstrait en donnant un exemple pour et contre la divisibilité en $\mathbb{R}$. Cet exemple n'est pas développé dans le cadre d'une activité de cours. Dans ce qui suit, nous donnons quelques exemples d'un DES avec de petites tâches. A chaque fois, l'enseignant demande à quelques élèves de répondre à chaque question afin de trouver la bonne réponse. Chaque élève effectue les petites tâches, éventuellement sur une feuille de papier brouillon.

1 Définition

Pour définir la notion de divisibilité et pour presenter plus clairement ses propriétés et exercices, nous utilisons deux nouveaux symboles.

Notation:

| (lire: "est un diviseur de")

∤ (lire: "n'est pas un diviseur de ")

Exemples:

3 | 6 car 6 = 3 · 2

10 ∤ 25 car 25 ≠ 10 · 2 + 5

Divisibilité dans ℝ [x]

En mots: $A(x)$ est divisible par $D(x)$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $D(x)$ est nul.

En symboles: $D(x)/A(x) \Leftrightarrow \exists Q(x) \in \mathbb{R}[x]: A(x) = D(x) \cdot Q(x) \ \Leftrightarrow R(x) = 0$

Du: Van Basis Tot Limiet 4 - Functies - D-finaliteit 5 uur – Chapitre 3 Algebraïsch rekenen p139 ev (Maison d'édition die Keure)

Note sur cette définition : la partie concernant $R(x)$ sort de nulle part. Une meilleure définition serait celle des symboles : $D(x)/A(x) \Leftrightarrow \exists Q(x) \in \mathbb{R}(x): A(x) = D(x) \cdot Q(x)$ on a donc $R(x) = 0$

DES avec des petites tâches 1

1. Donnez un exemple de division exacte en ℝ.
   Question d'aide: donnez deux nombres dont l'un divise l'autre.
2. Expliquez pourquoi votre réponse est correcte.
   Question d'aide: Expliquez pourquoi le nombre 3 divise le nombre 6 (on note $3/6$).
3. Pour l'énoncé $3/6$ quels sont le diviseur et le dividende?
4. Pour l'énoncé $6 = 3 \cdot 2$ uels sont le diviseur, le dividende et le quotient (deux possibilités pour le diviseur !) ?
5. Donnez deux nombres qui ne se divisent pas.
   Question d'aide: 10 divise-t-il le nombre 25 ? Pourquoi oui/non ?
6. Expliquez pourquoi 10 ne divide pas le nombre 25.
7. Ecrivez 25 comme une expression de nombres contenant le nombre 10.
8. A la question 7, nommez les différents nombres.
   Indice : utilisez les noms diviseur, dividende, quotient, reste.
9. Ecrivez l'expression de la question 7 avec des symboles, choisissez les lettres que vous utilisez de façon à ce qu'il y ait un lien avec ce qu'elles représentent.
   Réponse: $a = d.q + r$
10. Donnez une notation générale pour le diviseur, le dividende et le quotient des polynômes.
    Réponse: $A(x), D(x), Q(x)$ en $R(x)$
11. Sous l'énoncé $6 = 3 \cdot 2$ een vergelijkbare uitspraak voor veeltermen. Gebruik de symbolen uit vraag 10
12. Ecrivez une définition en symboles pour une division exacte $D(x)/A(x)$

DES avec des petites tâches 2

1.à 4. mêmes questions que ci-dessus

Dans une leçon précédente, l'exercice suivant sur la division euclidienne a été présenté:

$$A(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 \ \text{door} \ D(x) = x - 1$$

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
2x^3 & +3x^2 & -8x & +3 & x & -1 & \\ \cline{5-7}
-(2x^3 & -2x^2) & & & 2x^2 & +5x & -3 \\ \cline{1-2}
 & 5x^2 & -8x & & & & \\
 & -(5x^2 & -5x) & & & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x & +3 & & & \\
 & & -(-3x & +3) & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 + 5x - 3$ en $R(x) = 0$

5. Pourquoi parle-t-on de division exacte ?
6. $3/6$. Vous avez appris que l'on parle alors de division ascendante parce qu'il y a un nombre, à savoir 2, de sorte que $3 \cdot 2 = 6$. Ici, 2 est le diviseur. Pour la division des polynômes ci-dessus, écrivez un énoncé tel que $6 = 3 \cdot 2$ avec les polynômes de l'exercice..
7. Écrire une définition en symboles pour une division exacte $D(x)/A(x)$

DES avec des petites tâches 3

1. Dans les exemples ou exercices de la leçon précédente, trouvez une division euclidienne où le reste est 0.
2. Pour votre exemple ou exercice, écrivez ce que sont $A(x), D(x)$ et $Q(x)$.
3. Vérifier que $D(x) \cdot Q(x) = A(x)$.
4. Dans ce cas, nous disons que $D(x)|A(x)$, qu'est-ce que cela signifie en mots ?

Quelques exemples d'élèves me viennent à l'esprit.

DES avec des petites tâches 4

Ne partez pas d'un exemple concret, mais de connaissances préalables abstraites. En effet, en fonction de la situation initiale de la classe, vous pouvez également commencer de manière abstraite.

1. Dans une leçon précédente, nous avons défini la division euclidienne comme suit:

> Division Euclidienne
> Soient $A(x),\ D(x), Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ et $D(x) \neq 0$
> La division euclidienne de $A(x)$ par $D(x)$ s'écrit: $A(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ avec $\deg(R(x)) < \deg(D(x))$ ou $R(x) = 0$. Ici, Q(x) est le quotient et R(x) le reste.

Du: Van Basis Tot Limiet 4 - Functies - D-finaliteit 5 uur – Chapitre 3 Algebraïsch rekenen p139 ev (Maison d'édition die Keure)

Quel sera l'énoncé de $A(x)$ si le reste est le polynôme 0 ?

2. On parle alors de division exacte. Rédigez une définition pour accompagner l'énoncé: $A(x)$ est divisible par $D(x)$.

7.4 Activating pupils withing the DES teaching method

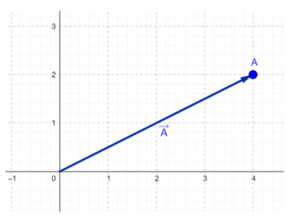
La méthode d'enseignement par questions et réponses (DES) comporte des pièges. Un enseignant ne peut pas toujours interpréter correctement si tous les élèves restent attentifs au sujet de la leçon, en particulier dans les grands groupes. Dans ce qui suit, nous présentons quelques idées pour éviter que les élèves ne se désengagent.

A. Des réponses dans l'air

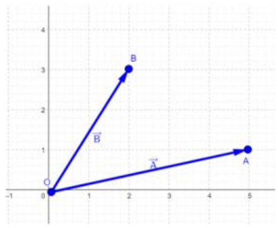
Chaque (paire d') élèves reçoit des feuilles de brouillon avec un feutre épais ou des ardoises effaçables avec un marqueur. Lorsque l'enseignant pose une question, les élèves écrivent la réponse sur leur feuille de brouillon ou leur ardoise effaçable. L'enseignant donne un signal et les (paires d') élèves lèvent les tableaux en l'air. En un coup d'œil, l'enseignant peut voir la réponse de chaque élève (ou paire d'élèves). Aucun élève n'échappe à l'activité de réflexion. Sur l'image, les élèves devaient tracer le graphique d'une droite répondant à certaines conditions.

Une variante de cette même méthode consiste pour l'enseignant à préparer des cartes de couleur ou  des cartes avec des lettres. 

L'enseignant pose une question à choix multiples. Les élèves cherchent la carte qui contient la bonne réponse. Ils lèvent les cartes en l'air après un signal de l'enseignant. Les exemples ci-dessous montrent deux questions à choix multiples pour les deux options



What is the coordinate of the point vector $\vec{A}$?
- (2,4)
- (4,2)
- (2,1)
- (1,2)

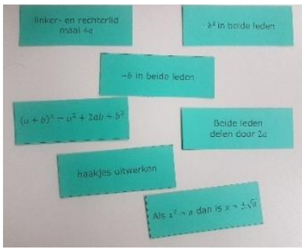


What is the coordinate of the point vector $\vec{A} + \vec{B}$?

A. (7,3)
B. (5,3)
C. (7,4)
D. (2,7)

Une autre variante de cette même méthode est que l'enseignant prépare quelques cartes avec des réponses à des questions, des justifications d'une étape dans une preuve ou une solution d'un exercice ou une justification/formule/définition/règle... pour faire une étape supplémentaire dans une preuve ou une solution d'un exercice.

Les exemples de l'image et du tableau montrent quelques cartes qui peuvent être utilisées lors de la démonstration d'une propriété. Les cartes présentent des justifications pour certaines étapes de la preuve. Les élèves réfléchissent à une propriété ou à une définition qui peut justifier l'étape suivante donnée par l'enseignant ou qui peut être utilisée pour passer à l'étape suivante de la preuve. Ils lèvent la carte en l'air. En général, les élèves qui choisissent la bonne carte peuvent donner une justification concluante (dans un langage mathématique correct ou non).



L'image montre les cartes utilisées pour prouver la propriété sur les solutions d'une équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Le tableau présente les cartes qui peuvent être utilisées pour prouver un théorème de calcul intégral.

Définition de la dérivée	Définition de la fonction intégrale	Théorème de la valeur moyenne	Addition et soustraction
Définition étendue de l'intégrale définie	Additivité de l'intégrale définie	Calcul de la limite	

B. Discussions éclairs

Les discussions éclairs est une méthode d'enseignement par questions et réponses dans laquelle l'enseignant pose des questions et sélectionnes une élève de manière aléatoire pour répondre la question. L'enseignant maintient le rythme élevé, la tension dans la conversation d'apprentissage et ne laisse pas aux élèves la possibilité de s'éloigner. La condition préalable est que l'ensemble du DES se déroule sans heurts. Il exige une grande concentration de la part de l'enseignant. Les questions doivent avoir le bon niveau de difficulté et donc pouvoir être résolues en quelques secondes, sinon le flux de la conversation sera perdu et l'attention diminuera. Une question plus difficile est possible, mais l'enseignant doit alors donner aux élèves un temps de réflexion. Environ deux minutes semblent longues à l'enseignant, mais pour réfléchir à une question plus difficile, c'est très court. Pendant les discussions éclair, il peut être conseillé de se déplacer dans la classe pour voir ce que font les élèves et comment ils réfléchissent, ou pour les inciter à faire une activité. Les discussions éclairs fonctionnent très bien dans les classes fortes. La qualité des questions est cruciale et, comme nous l'avons dit plus haut, la possibilité de les résoudre est très importante pour que cette méthode puisse être utilisée dans une classe faible.

7.5 Méthodes d'enseignement : Travail en groupe

Il existe différentes formes de travail de groupe : le travail de groupe parallèle et le travail de groupe avec des experts, qu'il soit échelonné ou non. Plus que jamais, une bonne préparation de l'organisation est importante pour que le travail de groupe soit actif ou non. Un démarrage en douceur est une condition préalable. Tout d'abord, il est très important que les élèves reçoivent des instructions claires et complètes sur ce qu'ils doivent faire exactement. Ensuite, les élèves doivent rapidement modifier la disposition des bureaux dans la salle de classe afin de favoriser la mise en œuvre de la forme de travail. Enfin, les moyens de former rapidement des groupes favorisent un démarrage en douceur.

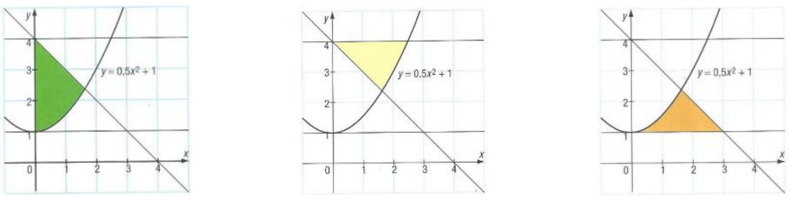
A. Travail en groupe parallèle

Un travail de groupe parallèle est un travail dans lequel chaque groupe se voit confier le(s) même(s) tâche(s). Ce type de travail de groupe est souvent réalisé dans les classes où l'enseignant donne quelques exercices et où les élèves travaillent par deux pour les résoudre. Après un certain temps, les solutions des groupes sont vérifiées en classe ou l'enseignant met à disposition les corrigés (sur papier ou en ligne). Il est conseillé, en fonction du niveau de difficulté de l'exercice, d'avoir une discussion en classe sur les méthodes utilisées, les réponses trouvées et sur les différentes (bonnes et mauvaises) réponses et méthodes.

B. Travail de groupe par étapes avec des experts

Les élèves travaillent en différentes phases avec des groupes composés différemment. Il est courant que les élèves travaillent d'abord individuellement sur un nombre limité de tâches différentes. Ensuite, les élèves ayant le même travail forment des groupes d'experts dans lesquels ils discutent ensemble du travail et deviennent ainsi plus compétents (experts) pour le résoudre. Les groupes sont ensuite redistribués de manière que les groupes mixtes contiennent un élève de chaque groupe d'experts. Les informations provenant des groupes d'experts sont ainsi rassemblées de sorte que les groupes mixtes disposent de suffisamment de connaissances pour faire face à une tâche plus complexe. L'exemple suivant montre que différents exercices sont résolus dans différents groupes, de sorte que chaque élève de la classe ne résout pas lui-même tous les exercices.

En entrant dans la classe, les élèves reçoivent une feuille sur laquelle figure un graphique représentant une zone (de couleur orange, jaune ou verte). Les élèves doivent trouver l'aire en utilisant le calcul intégral. Au cours d'une courte phase initiale, chaque élève essaie de résoudre l'exercice par lui-même.



Dans la phase 2, les élèves ayant une zone de même couleur forment un groupe. Ils mettent en commun ce qu'ils ont trouvé et deviennent ainsi plus habiles (experts) dans la résolution de l'exercice. Les groupes décident de la meilleure méthode et de la meilleure réponse et écrivent leur meilleure méthode et leur meilleure réponse sur une feuille de papier. Ils le remettent à l'enseignant (soit à la fin de l'exercice, soit à la fin de la leçon).

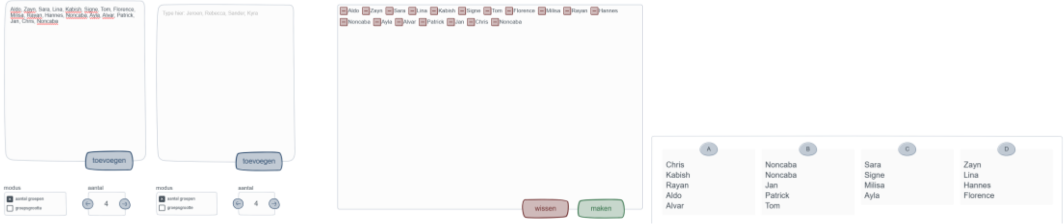
Dans la phase 3, les groupes sont redistribués dans de nouveaux groupes avec un ou deux élèves de chaque groupe d'experts. Chaque élève présente la solution de son exercice. Les autres élèves écoutent et posent des questions s'ils ne comprennent pas.

L'enseignant note les solutions des différents groupes (et non celles de chaque élève) et discute de ses commentaires en classe ou les met à la disposition des élèves (en ligne ou sur papier).

Les variantes:

- Pour la phase 1 : les élèves ont déjà essayé tous les exercices à la maison et le temps de classe est utilisé pour des discussions en petits groupes. Seules les phases 2 et 3 sont donc effectuées en classe.
- Diviser la classe en groupes:
    - La zone verte est un peu plus facile à résoudre que les zones jaune et orange.
        - L'enseignant laisse les élèves choisir la zone qu'ils veulent résoudre.
        - L'enseignant laisse d'abord tous les élèves résoudre la zone verte. Ensuite, il divise la classe en deux groupes pour qu'ils résolvent les zones jaune et orange.

- Utilise 'groepjesmaker': **www.schoolbordportaal.nl/schoolborden/programma-839.html**. Les captures d'écran ci-dessous montrent comment saisir des noms, ajouter des (toevoegen) them and form (4) groups.



- One phase 3: Each group presents their solution to the exercise for the rest of the class.

Le film suivant donne une idée de cette activité en classe: https://youtu.be/j93o26fIBG4. The video can be used for a Video-task: How active are the learners? Is deep learning taking place?

Nous constatons que les apprenants sont actifs avec le contenu et l'exercice puisque nous remarquons que :

- Des discussions sont en cours;
- Les élèves se donnent des explications les uns aux autres;
- Les élèves font l'expérience de la réussite en trouvant la solution (mains en l'air) ;
- Certains élèves travaillent individuellement au sein de leur groupe ;
- Le tableau est utilisé par plusieurs élèves pour mettre côte à côte différentes solutions (concernant le même exercice) ;
- Les élèves utilisent leur smartphone pour prendre des photos du tableau.

Les chaises et les tables sont disposées en L et au milieu en U. Il est ainsi facile de passer rapidement du travail en classe au travail en groupe.

7.6 Méthodes d'enseignement : Jeux éducatifs

Les jeux peuvent inspirer des méthodes d'enseignement pour enseigner, pratiquer ou répéter certains contenus d'apprentissage. Certains jeux mathématiques sont disponibles dans le commerce, mais il est rare qu'ils correspondent exactement à ce que l'enseignant souhaite utiliser en classe. Que vous fabriquiez votre propre jeu ou que vous en achetiez un, il est important de mettre en place ou d'adapter les règles correctement afin de permettre un apprentissage approfondi des mathématiques. Comme nous l'avons déjà mentionné, jouer au jeu n'est pas du tout un objectif. Les élèves doivent apprendre des concepts mathématiques, des procédures, réfléchir à leur travail... Nous vous présentons quelques types de jeux éducatifs.

7.6.1 Jeux d'association

Le jeu de la mémoire et le jeu du quatuor permettent de s'entraîner à faire des liens entre deux ou quatre concepts. Ces deux jeux sont idéaux pour mettre en relation des concepts rarement abordés dans les exercices. L'élaboration d'exercices dans lesquels les élèves associent des concepts correspondants contribue à la construction d'un schéma cognitif riche..

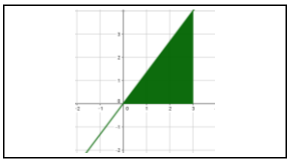
A. Jeu de mémoire

Le but du jeu est que les joueurs retournent le plus grand nombre possible de paires de cartes correspondantes. Le matériel nécessaire est un nombre pair de cartes dont chacune forme une paire correspondante. Le jeu se déroule comme suit. Les cartes sont mélangées et placées face cachée. Le premier joueur retourne une carte de son choix. Il retourne ensuite une deuxième carte. Si les images des deux cartes forment une paire, le joueur peut prendre les deux cartes et les garder jusqu'à la fin du jeu. Il recommence ensuite jusqu'à ce qu'il ait retourné deux cartes qui ne forment pas une paire. Les deux cartes retournées sont remises à leur place, recouvertes. C'est au tour du joueur suivant. Le jeu se termine lorsque toutes les cartes ont été prises. Le joueur qui a le plus de paires gagne.

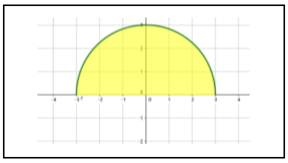
Le jeu de mémoire est l'un des jeux dont l'enseignant doit changer les règles. L'apprentissage en profondeur des concepts mathématiques n'a rien à voir avec le fait de se rappeler où se trouvent les cartes sur la table, mais il a à voir avec l'appariement des paires. On pourrait donc dire que pendant 3 à 5 minutes, les élèves peuvent jouer au vrai jeu de mémoire. Ensuite, ils doivent tourner toutes les cartes de manière que les images soient visibles, puis vérifier en groupe les paires correspondantes.

Nous donnons quelques exemples pour illustrer pour quoi vous pouvez utiliser le jea de mémoire : des graphiques avec des préceptes correspondants, des intégrales avec leur signification géométrique, les côtés gauche et droit d'une formule, deux écrans d'une calculatrice graphique qui vont ensemble, des puissances avec leur exposant entier correspondant, des puissances avec leur forme élaborée...

Exemple 1 : Faire correspondre le graphique à la règle de la fonction



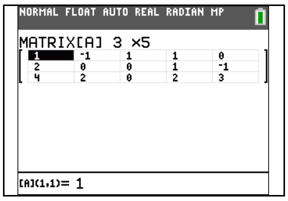
$f(x) = \frac{4}{3}x$

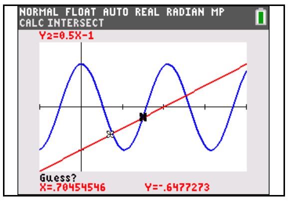


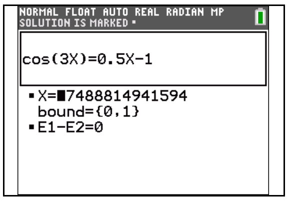
$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Exemple 2 : Faites correspondre les écrans de la calculatrice avec les écrans correspondants

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$



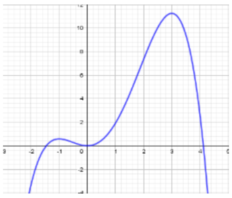


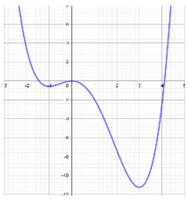


Exemple 3 : associer le tableau de signes au graphique correspondant

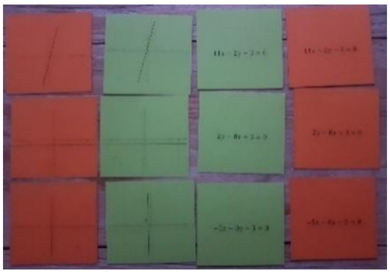
x		-1		0		3	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

x		-1		0		3	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+





Exemple 4 : cet exemple est similaire à l'exemple 1, mais il offre une possibilité supplémentaire. Les cartes mémoire sont imprimées en 2 couleurs. Elles peuvent également être utilisées pour former des paires et, avec le temps, des groupes de 4. Dans un premier temps, les élèves dont les cartes correspondent à la même couleur forment une paire et, après un certain temps, les paires de verts et d'oranges dont les cartes correspondent à la même couleur s'associent pour former un groupe de 4 élèves.



B. Jeu de familles

Un jeu de familles est un jeu de cartes à paquets dédiés. Chaque paquet contenait à l'origine 32 cartes, divisées en 8 groupes de 4 cartes qui vont ensemble. Un tel groupe de 4 cartes s'appelle une famille. Au fil du temps, le nombre de cartes a varié, tant que le nombre total de cartes est un multiple de 4. Le but du jeu de familles est de rassembler le plus grand nombre de familles possible. Pour jouer, chaque joueur reçoit 4 cartes. Les cartes restantes sont placées face cachée dans une pile au milieu de la table. Chaque joueur vérifie s'il possède une famille. Si c'est le cas, il le place face visible devant lui et prend 4 cartes supplémentaires de la pile. Le joueur 1 tire une carte de la pile restante. Il la garde et pose une carte face visible au milieu de la table pour que les autres puissent la voir. Il garde ainsi 4 cartes en main. S'il a une famille, il l'ouvre devant lui et prend 4 autres cartes de la pile. Il vérifie à nouveau s'il s'agit d'une famille. Le joueur 2 commence. Il peut prendre la carte visible du joueur 1 ou une carte de la pile. Le joueur 2 garde la nouvelle carte et pose une carte face visible sur la table et une famille s'il en a un. Le jeu se poursuit ainsi jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cartes.

Le jeu de familles est un autre jeu dont l'enseignant doit modifier les règles pour qu'il soit adapté à l'apprentissage approfondi des concepts mathématiques. En effet, le jeu peut durer trop longtemps sans qu'il y ait des familles. Il se peut par exemple que plusieurs joueurs essaient de collecter la même famille. Si aucune famille n'est collecté, le jeu va à l'encontre de son objectif mathématique. Après tout, nous voulons collecter 4 cartes correspondantes.

Nous nous écartons des règles du jeu et jouons le jeu en plusieurs tours avec des règles adaptées. L'adaptation suivante permet de s'éloigner lentement du jeu et de se concentrer sur l'objectif de "construction d'un schéma cognitif riche". Au premier tour, chaque joueur joue une fois. Ensuite, les paires (ou, en cas de nombre impair, les duos et les trios) sont formées. Au deuxième tour, chaque paire (ou trio) rassemble ses cartes. Les familles sont placés ouverts sur la table. Pour chaque famille qu'une paire pose face visible, elle prend 4 cartes supplémentaires de la pile ou des cartes posées face visible devant les autres paires. Les paires (ou trios) jouent ensuite l'une contre l'autre comme au premier tour. Au troisième tour, tous les joueurs jouent ensemble. Ils posent toutes les cartes face visible sur la table et forment tous les familles.

<u>Exemple 1</u> : Volume et surface

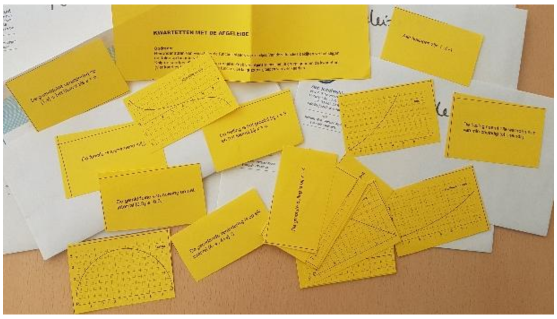
Les 4 cartes correspondantes traitent du volume ou de l'aire (image) et de la formule équivalente.

<u>Exemple 2</u> : Fonctions exponentielles

Les 4 cartes correspondantes donnent une formule, un tableau de signes, le facteur de croissance (ou pourcentage) et le temps (demi-vie ou doublement).

<u>Exemple 3</u> : Produits dérivés

Les 4 cartes correspondantes indiquent le graphique de la fonction, la fonction dérivée, une description de la pente et le taux de variation moyen.

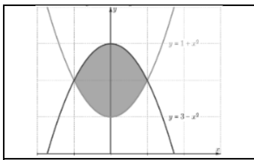


Exemple 4 : Exercices de géométrie

Les 4 cartes correspondantes donnent le même résultat. Les élèves résolvent l'exercice sur les cartes. Ceux qui ont les mêmes réponses forment une famille.

Exemple 5 : Exercices sur le calcul intégral

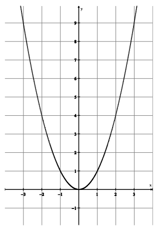
Les 4 cartes correspondent à une figure et amènent les élèves à réfléchir à différentes tâches à résoudre, y compris une étape dans la solution..

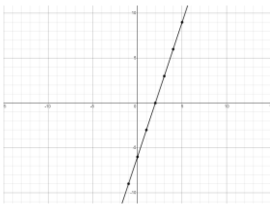
<table>
<tr><td></td><td>I am finding either the area of the coloured surface or the volume when I rotate the surface about the x-axis</td></tr>
<tr><td>$\pi\int_{-1}^{1}[(3-x^2)^2-(1+x^2)^2]dx$</td><td>$2\pi\int_{0}^{1}((3-x^2)-(1+x^2))dx$</td></tr>
</table>

C. Associations avec un nombre quelconque de cartes correspondantes

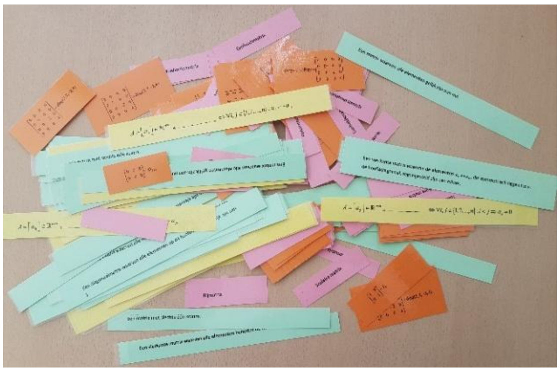
Bien entendu, nous pouvons créer des cartes d'association avec n'importe quel nombre de cartes. Vous trouverez d'autres exemples ci-dessous.

Exemples 1 : Ils traitent tous de 3, 5 ou 9 concepts pour les fonctions. Les images montrent l'utilisation en classe.

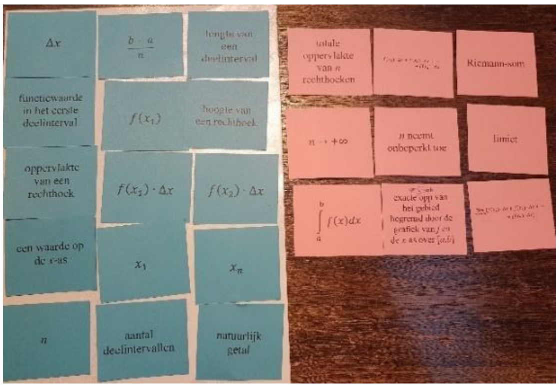
<table>
<tr>
<td>$y = x^2$</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr>
<tr><td>-3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td></td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>↘</td><td>min</td><td>↗</td></tr>
</table>
</td>
<td>$dom\ f = \mathbb{R}$
$ima\ f = \mathbb{R}^+$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>$f(x) = 3x - 6$</td><td>Le nom de la fonction est f t l'équation de la fonction est $y = 3x - 6$</td></tr>
<tr><td>Il s'agit d'une fonction linéaire</td><td>Il s'agit d'une fonction du premier degré</td></tr>
<tr><td>$(3,3)$ et $(2,0)$ sont des éléments de la fonction</td><td>La pente de la ligne droite est 3</td></tr>
<tr><td>Le quotient différentiel de deux points de la fonction est $\frac{9}{3}$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-15</td><td>-12</td><td>-9</td><td>-6</td><td>-3</td><td>0</td><td>3</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

<u>Exemple 2</u> : Dans cet exemple, les élèves doivent faire correspondre toutes les cartes à une certaine matrice spéciale : un nom, une définition en mots ou en symboles, un exemple, une propriété... Le nombre de cartes à faire correspondre varie en fonction de la matrice spéciale.



<u>Exemple 3</u> : Dans cet exemple, toutes les cartes correspondantes font partie de la définition d'une intégrale définie. Il est conçu pour que les élèves montrent qu'ils comprennent les différentes parties et les différents éléments de la définition. Ils doivent associer 3 cartes. Les cartes bleues sont plus faciles que les roses. Toute la classe commence à faire l'association bleue. Les élèves les plus rapides peuvent s'attaquer aux cartes roses.



7.6.2 Le jeu de dominos

Un jeu de dominos se compose de plusieurs tuiles rectangulaires (dominos), dont la face est généralement divisée en deux parties par une ligne. La partie droite d'un domino correspond à la partie gauche d'un autre domino. Le but est d'assembler les dominos dans le bon ordre. Ce jeu a un usage mathématique similaire à celui de la mémoire : il s'agit de faire correspondre deux concepts.

Pour jouer, tous les dominos sont répartis entre les participants. Le participant qui a la "pierre de départ" (par exemple, "intégrales fondamentales indéfinies" ou "goniométrique START") peut commencer le jeu. Si le participant suivant a un domino correspondant, il peut poser son domino, sinon il reçoit un point de pénalité. Le jeu continue ainsi jusqu'à ce que toutes les pierres soient posées. Le joueur qui a le moins de points de pénalité gagne.

Bien entendu, il est possible de sauter la partie du jeu et de laisser des individus ou des groupes d'élèves poser tous les dominos dans le bon ordre. On forme ainsi un "serpent".

Exemple 1 : formule (calcul intégral et trigonométrique)

Intégrales fondamentales indéfinies	$\int x^r dx$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
$\tan x + c$	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2}$

Goniométrique **START**	$\cos(\alpha-\beta)$	$\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$	$\sin 2\alpha$
$2\sin\alpha\cos\alpha$	$\tan 2\alpha$	$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	$\sin^2\alpha$

Exemple 2 : solutions de petits exercices (produits remarquables, dérivées, racines et puissances)

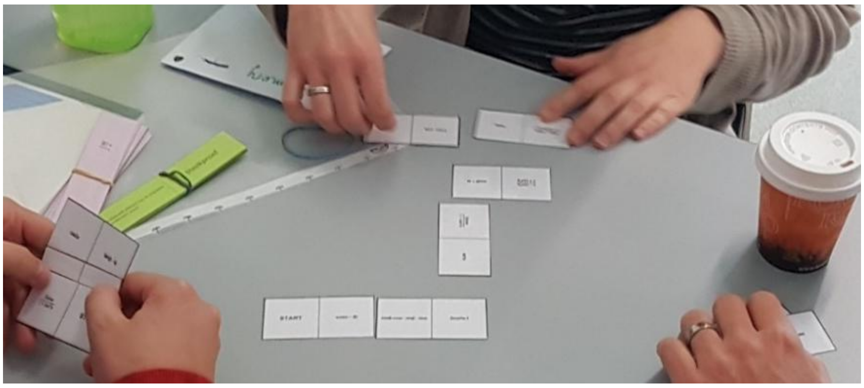
START	$(x-3x^2)(x+3x^2)$	x^2-9x^4	$(6a-4)^2$
$36a^2-48a+16$	$(a-b)(a+b)$	a^2-b^2	$25+100x+100x^2$

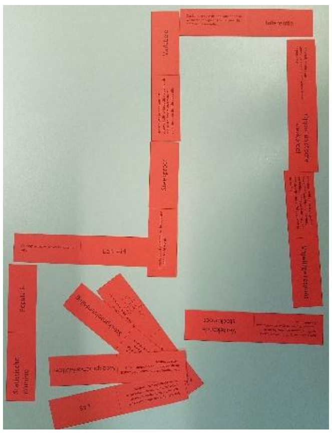
START	$D(2x^2)$	$4x$	$D(3\cos x)$
$-3\sin x$	$D(3-\sin x)$	$-\cos x$	$D(4x^2-5x+8)$

START	$\sqrt[3]{a^9b^{12}}$	a^3b^4	$\sqrt[5]{32a^{15}}$
$2a^3$	$\sqrt[6]{a^{6x}b^{12y}}$	a^xb^{2y}	$\sqrt[5]{a^2}^{20}$

Exemple 3 : définitions (statistiques)

Domino statistique	Population	Groupe complet sur lequel nous souhaitons obtenir des informations	Unité
Chaque élément individuel de la population étudiée	Échantillon	Partie de la population qui est effectivement examinée dans le but d'obtenir des informations fiables sur l'ensemble de la population.	Variable





7.6.3 Puzzles

Enseigner aux élèves comment faire une preuve mathématique n'est pas facile. Travailler avec des preuves individuellement et ainsi les comprendre ou les faire soi-même est une étape intermédiaire importante. La fabrication d'un puzzle est un exemple d'une telle étape. La méthode peut être utilisée pour les preuves, mais aussi pour les solutions d'exercices qui peuvent être difficiles à trouver.

Si l'on peut prouver une propriété ou une identité en démontrant le côté droit (RHS) à partir du côté gauche (LHS) ou l'inverse, les différentes étapes peuvent être "coupées". L'élève doit réaliser le puzzle en plaçant les différentes pièces (étapes) dans le bon ordre. Il doit à chaque fois expliquer la justification d'une étape et pourquoi il peut placer une certaine pièce à l'étape suivante. Une variante de cette méthode consiste à fabriquer des pièces de puzzle avec les justifications des étapes.

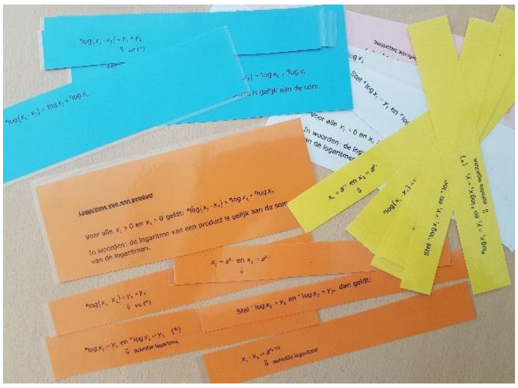
<u>Exemple 1</u> : théorème principal du calcul integral

Dans l'image, vous trouverez quelques pièces du puzzle de la preuve.

$\boxed{I_a'(x)}$ $\boxed{=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt+\int_x^a f(t)dt\right)}$ $\boxed{=\lim_{h\to 0}\frac{I_a(x+h)-I_a(x)}{h}}$ $\boxed{=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right)}$

<u>Exemple 2</u> : le logarithme d'un produit

Dans l'image, vous trouverez le même puzzle dans des couleurs différentes. Il est ainsi plus facile pour les enseignants de séparer les différents puzzles d'une même propriété.



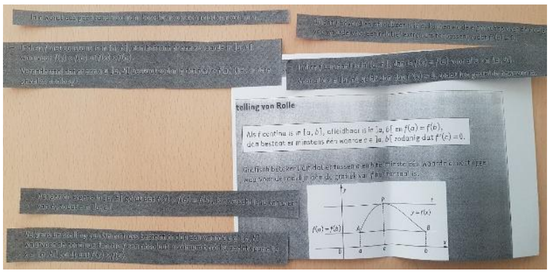
<u>Exemple 3</u> : Somme et produit des racines d'une équation quadratique

L'image montre les pièces du puzzle nécessaires pour les deux preuves. Une variation (différenciation) : Laissez les élèves choisir s'ils veulent les pièces pour les différentes preuves séparément ou ensemble.

$\frac{-2b}{2a}$	$\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$	$\frac{4ac}{4a^2}$
$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$	$\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2}$	$\frac{(-b+\sqrt{D})(-b-\sqrt{D})}{4a^2}$
$\frac{-b}{a}$	$\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$	$\frac{b^2-D}{4a^2}$
$\frac{-b+\sqrt{D}-b-\sqrt{D}}{2a}$	$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$	$\frac{c}{a}$

<u>Exemple 4</u> : Propriété des rôles

L'image montre que l'enseignant a copié le texte du manuel pour faire le puzzle. Cela réduit le travail de fabrication du puzzle au minimum, mais l'exercice pour les élèves reste le même.



<u>Exemple 5</u>: dérivée de a^x

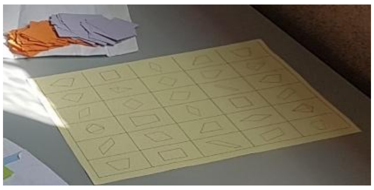
L'image montre les justifications des différentes étapes de la preuve.

Definition dérivée	$f(x) = a^x$	Propriété des puissances
$\lim_{x\to a}(c.f(x)) = c.\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ est un nombre qui varie avec a	distributivité

Puisque, comme souvent dans un exercice, tous les élèves ne terminent pas en même temps, l'enseignant doit penser à la différenciation du tempo. Chaque élève doit faire la première étape, avoir le temps de réfléchir et de faire le puzzle. Ceux qui sont prêts peuvent obtenir des cartes avec des explications ou non (laisser le choix aux élèves) et justifier chaque étape. Ils peuvent aider les autres. Ils peuvent écrire la preuve sans le puzzle dans leur cahier et indiquer les étapes difficiles. Les élèves peuvent aussi avoir le choix au début de faire la preuve avec ou sans le puzzle, etc.

7.6.4 Puissance 4

Le matériel pour ce jeu est un plateau avec un certain nombre de colonnes et de lignes et deux piles de cartes, chacune d'une couleur différente. Le jeu se joue avec 2 participants (ou 2 groupes) et chaque participant dispose d'une pile de cartes de sa couleur. À tour de rôle, chaque participant retourne une carte de sa pile et la place sur le plateau. Le but est d'être le premier à former une rangée continue de 4 cartes de sa couleur, que ce soit horizontalement, verticalement ou en diagonale.



L'exemple aborde les quadrilatères, leurs définitions et leurs propriétés. L'image montre une grille à découper avec les quadrilatères et les deux piles de couleurs différentes. Le tableau ci-dessous est constitué de descriptions de quadrilatères. Les joueurs doivent placer leur carte représentant un quadrilatère au bon endroit sur le tableau. Le quadrilatère doit correspondre à la description du tableau.

rectangle	trapèze	quadrilatère ayant au moins deux côtés égaux	carré	quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires
losange	quadrilatère dont les diagonales se coupent	quadrilatère ayant au moins une paire de côtés parallèles	quadrilatère	quadrilatère ayant au plus une paire de côtés parallèles
quadrilatère cyclique	trapézoïdal isocèle	quadrilatère ayant au moins deux angles égaux	trapézoïdal rectangulaire	parallélogramme
quadrilatère à quatre côtés égaux	trapézoïdal non rectangulaire	trapézoïdal	parallélogramme	quadrilatère ayant au moins un angle obtus
quadrilatère cyclique	losange	polygone dont la somme des angles est de 360°	rectangle	quadrilatère à quatre angles égaux
polygone régulier	quadrilatère à diagonales égales	quadrilatère à au moins deux côtés égaux	trapèze qui n'est pas un parallélogramme	quadrilatère à au moins un angle droit

7.6.5 Salle d'évasion

Cette méthode d'enseignement a été mise au point par Mirte Vangrunderbeek, étudiante à l'école d'éducation. Grâce à cette méthode d'enseignement, les élèves font des exercices sur les matrices de transition avec beaucoup d'enthousiasme et sont satisfaits du prix qu'ils reçoivent s'ils déchiffrent le code : les solutions des exercices et une nouvelle tâche.

Le matériel se compose de cartes pour une division en groupes et de 3 fiches de travail avec exercices et corrigés.

A. La division en groupes

En entrant dans la salle de classe, les élèves reçoivent chacun une carte sur laquelle figure un élément d'une matrice $[a_{ij}]$. Une matrice est projetée au tableau. L'exemple de tableau et de matrice ci-dessous convient à des classes de 12 élèves ou moins.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 11 & 4 \\ 16 & -1 & -8 & 11 \\ -8 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Les élèves recherchent le numéro correspondant à leur carte dans la matrice projetée. Les élèves ayant le même numéro forment un groupe. S'il y a 11 élèves dans la classe, l'enseignant ne distribue pas a_21. Ainsi, un total de 5 groupes se forme : 1 groupe de 3 (4), 4 groupes de 2 (3,-8,11,-1).

B. Résolution d'exercices à l'aide de trois fiches de travail

Chaque groupe d'élèves travaille sur les mêmes fiches. Chaque feuille de travail fournit un code permettant de passer à la feuille de travail suivante. Les élèves travaillent 30' pour déchiffrer tous les codes de l'escape room. L'enseignant projette un compte à rebours.

Les groupes commencent la première feuille de travail en même temps. Celle-ci contient deux exercices sur la construction de matrices de transition. Si les matrices de transition sont correctes, les élèves trouvent le code au bas de la feuille de travail pour ouvrir la serrure d'une boîte. Dans cette boîte, chaque groupe trouvera la clé de correction de la fiche de travail 1 et la tâche de la fiche de travail 2. Le groupe qui termine la feuille de travail 1 en premier prend une clé de correction et une nouvelle tâche, ferme le cadenas et donc la boîte. Il corrige d'abord la feuille de travail 1 et la montre à l'enseignant.

Ensuite, les élèves font la fiche 2 et réalisent deux exercices sur le dessin d'un graphique correspondant à une matrice de transition. Lorsque leurs graphiques sont prêts, ils font le tour de la classe à la recherche des graphiques correspondant à leurs solutions. Sur les murs, il y a plusieurs papiers, chacun montrant deux graphiques avec un code QR. L'une d'entre elles contient les solutions correctes, tandis que les autres présentent des solutions erronées. Lorsque les élèves trouvent le papier qui montre leur combinaison de graphiques, ils scannent le code QR. Le texte "Oups... ce ne sont pas les bons graphiques" apparaît lorsque la solution est erronée. Vérifiez à nouveau vos exercices. Vous pouvez y arriver ! Pour les solutions correctes, les élèves lisent "Félicitations, vous avez terminé les exercices avec succès. Cherchez la feuille de travail 3 sous votre chaise!'

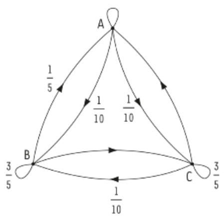
Sur la troisième feuille de travail, les élèves font un exercice d'application sur le nombre de Belges qui auraient vécu ou vivent dans la Région de Bruxelles-Capitale en 2017 et en 2030. Au verso, les élèves doivent combiner les chiffres des réponses pour obtenir de nouveaux nombres. Il y a également une carte de la classe avec certains des nombres résultant de l'exercice. La bonne solution fournit un lieu que les élèves découvrent grâce à un plan de la classe. A cet endroit, ils trouvent une enveloppe contenant le corrigé de la fiche de travail 3 et une question du test.

C. Fiche de travail 1

Problème : Complétez le graphique et notez la matrice de transition correspondante..

Exercice 1

Exercice 2



Code

Cijfer 1: $6.a_{11}$ $(oef\ 1)$	Cijfer 2: $3.a_{21}$ $(oef\ 1)$	Cijfer 3: $5.a_{22}$ $(oef\ 2)$

D. Fiche de travail 2

Problème : Dessinez le graphe des matrices de transition suivantes.

Exercice 3

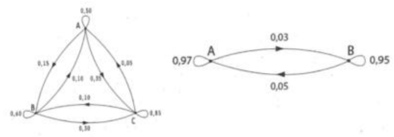
$$\begin{array}{c|c} & \text{van} \\ \text{naar} & \begin{array}{cc} \quad A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}97 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}95 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exercice 4

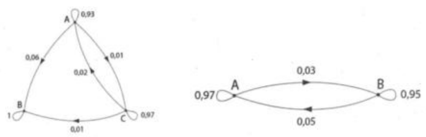
$$\begin{array}{c|c} & \text{van} \\ \text{naar} & \begin{array}{ccc} \quad A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}93 & 0 & 0{,}02 \\ 0{,}06 & 1 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0 & 0{,}97 \end{bmatrix} \end{array}$$

Plusieurs graphiques sont cachés dans la salle de classe. Trouvez la bonne combinaison de graphiques qui correspond à votre solution et scannez le code QR correspondant.

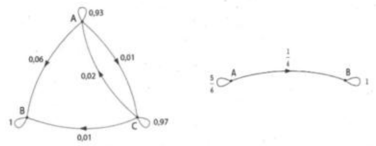
Fiche de travail 2 : Quelques exemples de corrigés



SCAN ME



SCAN ME



SCAN ME

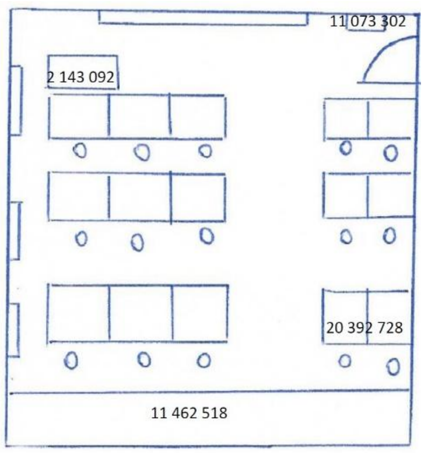
E. Fiche de travail 3

Exercice 5

Au 1er janvier 2016, la Belgique comptait 11 267 910 habitants, dont 1 187 890 vivaient dans la Région de Bruxelles-Capitale (RCC). Environ 0,2 % des Belges sont venus s'installer dans la Région de Bruxelles-Capitale cette année-là, tandis qu'environ 3,3 % ont quitté la RBC pour s'installer ailleurs en Belgique.

1. À l'aide de ces données, construisez une matrice de comptage et une matrice de migration.
2. Supposez que l'émigration/immigration donnée persiste chaque année. Combien de Belges vivraient alors dans la Région de Bruxelles-Capitale et combien en dehors de celle-ci en 2017 ?
3. Et combien en 2030 ?

Il s'agit de la somme du nombre de Belges vivant dans la Région de Bruxelles-Capitale en 2017 et du nombre de Belges ne vivant pas dans la Région de Bruxelles-Capitale en 2030. Trouvez le nombre correspondant sur la carte de la classe et rendez-vous à l'endroit correspondant à ce nombre et trouvez...

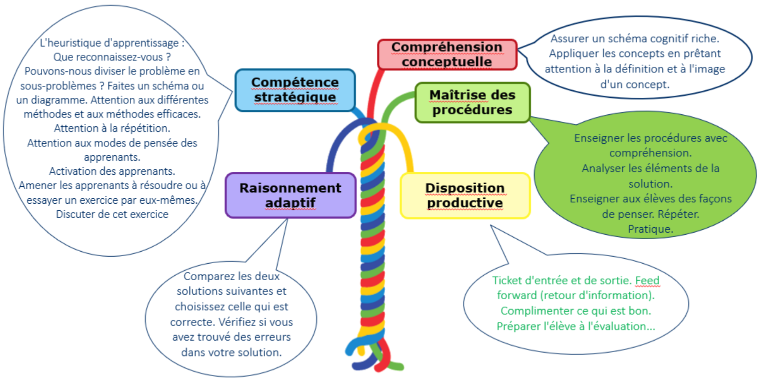


8 Évaluation

Dans ce chapitre, nous nous pencherons brièvement sur l'évaluation en classe. Nous partons du modèle de Kilpatrick qui décrit les objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques dans le cadre de cinq domaines de compétence mathématique qui s'entrecroisent. La poursuite de ces objectifs nécessite une approche pédagogique et une méthode d'évaluation différentes. Nous proposons quelques idées. Après tout, l'évaluation englobe bien plus que l'objectif de ce cours d'introduction.

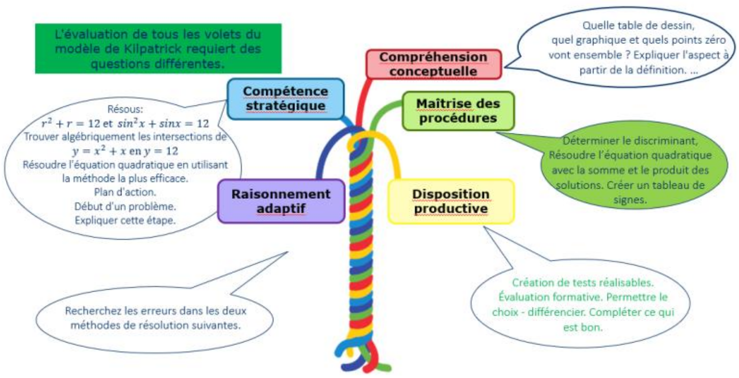
8.1 Approches pédagogiques conformes à l'évaluation

Lors de la conception d'une leçon, l'enseignant doit réfléchir en profondeur aux différents objectifs de la leçon. Dans une série de leçons portant sur un sujet particulier, les différents volets du modèle de Kilpatrick doivent être abordés de manière adéquate. La diapositive ci-dessous présente quelques idées d'approches pédagogiques correspondant à chaque domaine.



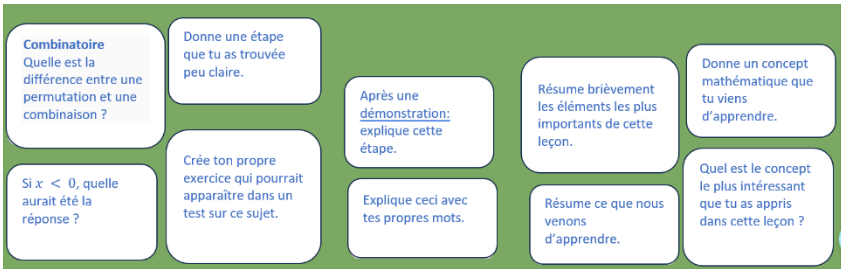
Bien entendu, les objectifs de la leçon vont de pair avec leur évaluation. L'enseignant doit également se concentrer suffisamment sur ce point pendant le cours. Les élèves doivent être préparés à l'évaluation des objectifs de la leçon pendant le cours. Après tout, l'un des critères d'une évaluation de qualité est la "transparence".

La diapositive suivante présente quelques idées sur la manière d'évaluer en tenant compte des différents volets.



L'approche de chaque leçon va de pair avec l'évaluation. L'enseignant doit veiller à ce qu'après chaque leçon, chaque élève connaisse les nouveaux concepts abordés et en ait une vision claire. Idéalement, l'élève place déjà les nouveaux concepts au bon endroit du schéma cognitif. Kilpatrick exige par exemple : l'apprentissage des définitions et de la compréhension des nouveaux concepts, l'apprentissage des procédures standard, l'apprentissage de la résolution des problèmes de recherche et de la modélisation, l'apprentissage de l'explication des méthodes... En particulier pour les enseignants ayant peu d'expérience, le plan de cours est crucial pour préparer l'enseignement en vue des objectifs de Kilpatrick. L'activation des élèves est cruciale. Poser de nombreuses questions (impliquant tous les élèves) et varier les types de questions est une première étape importante. Il n'est pas facile de poser des questions claires auxquelles les apprenants peuvent répondre, de poser des questions cruciales sur des étapes ou des concepts avec lesquels les apprenants peuvent avoir des difficultés, de poser des questions modèles en deux étapes et de savoir comment traiter les non-réponses. Il est donc essentiel de préparer les questions à la maison avant d'enseigner la leçon pour une bonne préparation. Au paragraphe 1.3, nous avons suggéré de diviser chaque leçon en séquences. Nous ajoutons la suggestion suivante : prévoir pour chaque séquence de leçon une bonne question permettant de vérifier si les élèves ont compris ce qui a été abordé dans la séquence.

Une petite question qui pourrait même être utilisée dans un test. Les questions "Avez-vous compris ?" ou "Avez-vous des questions ?" sont des questions souvent utilisées mais qui font rarement réfléchir les élèves ou, plus encore, qui les incitent rarement à s'engager dans une activité. Il s'agit plutôt de questions rhétoriques sans réponse. Dans l'image, vous trouverez de meilleures idées.



8.2 Encadrement des élèves

L'accompagnement des élèves pendant le cours est une autre approche importante pour vérifier s'ils ont compris la leçon. Les techniques suivantes permettent d'encadrer les élèves:

- Questionnement complémentaire : Demandez aux élèves d'expliquer une certaine réponse, demandez-leur d'expliquer leur méthode ;
- Permettre à d'autres élèves d'évaluer la réponse d'un élève ;
- Transmettre les questions des élèves à d'autres élèves ;
- Faire attention à la construction de schémas cognitifs ;
- Poser des questions de réflexion, des questions de méthode, des questions cruciales pour rendre le processus d'apprentissage efficace ;
- Pendant l'accompagnement du travail de groupe : éviter les cours magistraux mais se concentrer sur les mini DES, poser des questions qui font avancer les élèves dans leur réflexion.

8.3 Le rôle de la répétition : Tickets d'entrée et de sortie

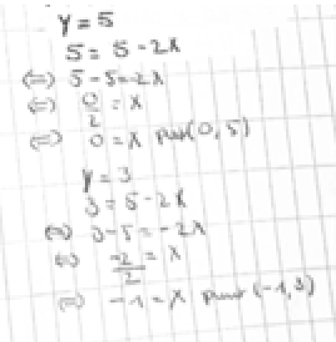
'*Dans le processus d'enseignement des mathématiques, la répétition du matériel étudié occupe une place importante. Une répétition correctement organisée est l'un des facteurs contribuant au développement intellectuel de chaque élève, à l'acquisition de connaissances approfondies et durables. La nécessité de répéter le matériel étudié précédemment est due à la structure même du programme de mathématiques. Par exemple, les élèves étudient le thème du programme : "Quadrangles" en 8e année, mais l'utilisent en 10e et 11e années lorsqu'ils étudient les sujets suivants : "Surface des corps de révolution", "Surface", "Volume des corps", etc. Enseigner les mathématiques sans répéter le matériel précédemment transmis chaque jour à chaque leçon, cela signifie transmettre, répéter aux élèves un certain nombre de lois, théorèmes, formules, etc. différents, sans se soucier de la façon dont ce matériel a été fermement et consciemment maîtrisé par nos animaux de compagnie ; cela signifie ne pas donner aux enfants des connaissances profondes et durables. Les recherches nous ont montré que la répétition est l'instrument principal de l'étude. Les résultats de l'analyse ont révélé que les élèves exposés à la répétition avec l'approche de la variation avaient des résultats significativement plus élevés, une meilleure compréhension conceptuelle et une rétention améliorée.*' (The role of repetition, Y. Akerke & Y. Ardak, Suleyman D. University, Proceedings of IYSW(2020), vol. 9, p 213-222.)

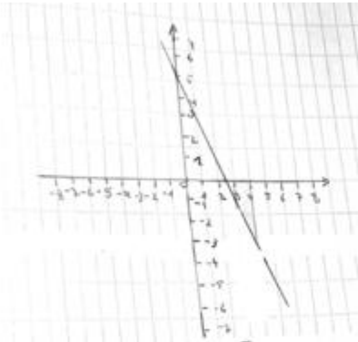
Voici quelques idées pour organiser une bonne répétition:

- faire un brainstorming avec les élèves sur les connaissances antérieures, individuellement ou en petits groupes, par exemple via Padlet ou de grandes feuilles de papier où les élèves écrivent ce qu'ils savent encore sur un certain sujet ;
- utiliser une ticket d'introduction où les élèves répondent à une courte question sur une leçon précédente pour démarrer et s'orienter vers la leçon suivante ;
- utiliser une ticket de sortie où les élèves répondent à une courte question sur la leçon avant de quitter la salle de classe.

Quelques exemples à utiliser lors de l'élaboration des tickets d'introduction ou de sortie :

- Demander aux élèves d'écrire une question sur la leçon au recto d'une feuille et la réponse au verso. L'enseignant vérifie la contribution des élèves et peut ensuite utiliser les bonnes réponses dans n'importe quelle leçon.
- Demandez aux élèves de poser une question sur le contenu de cette leçon, comme ils pourraient le faire lors d'un test.
- Présentez un exercice et posez aux élèves la question suivante : "Commencez à résoudre cet exercice en trois minutes". Il s'agit simplement de voir si les élèves peuvent prendre un bon départ, de vérifier s'ils ont une bonne idée des stratégies à adopter pour commencer à résoudre des exercices ou des questions...
- En entrant dans la classe, donnez aux élèves un papier avec une question. A la fin de la leçon, ils devraient être en mesure de répondre à la question.
- Utilisez des images du travail des élèves et demandez par exemple : "Trouvez l'erreur dans la réponse ci-dessous" ou "Décrivez comment trouver deux points d'une ligne droite d'une manière plus efficace".

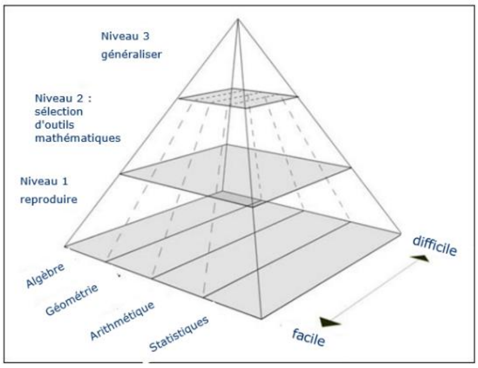




- Poser une question sur un contenu d'apprentissage qui n'a pas été explicitement abordé dans la leçon, mais qui devrait faire partie des connaissances permanentes..

8.4 La pyramide des tests

Si nous voulons développer des outils d'évaluation efficaces et équitables qui, en outre, testent tous les aspects de la compétence mathématique (voir 3.2), il est au moins important de poser des questions sur les différents aspects de la compétence mathématique. La pyramide des tests [De Lange, 1999] est un cadre adopté dans le monde entier qui peut sans aucun doute être utile à cet égard. La pyramide des tests comporte trois niveaux. Dans un test équilibré, les trois niveaux sont abordés. Bien que la forme de la pyramide puisse suggérer le contraire, aucune hiérarchie n'est supposée. La forme de la pyramide est principalement utilisée pour montrer la répartition du temps consacré aux tâches à chaque niveau. Répondre à des questions au niveau de la reproduction (niveau 1 - connaissances procédurales) prend généralement



moins de temps que de répondre à des questions au niveau 2 (connaissances stratégiques) ou 3 (connaissances conceptuelles). Au niveau 1, nous trouvons des questions avec lesquelles l'apprenant a eu beaucoup de pratique et les réponses peuvent être trouvées immédiatement ou en quelques étapes. En général, pour la répartition des questions dans un test, on utilise le ratio suivant : Niveau 1 : Niveau 2 : Niveau 3 = 3:2:1

Le point de départ est qu'un élève qui a maîtrisé les compétences de base mais qui n'a pas fait preuve d'une compréhension suffisante de la matière traitée obtiendra tout de même la note de passage.

Nous expliquons brièvement les différents niveaux dans ce qui suit

Niveau 1: Reproduire

Ce niveau concerne la connaissance des concepts, des définitions et des procédures qui ont été pratiqués au cours des leçons précédentes. Il s'agit de questions correspondant aux volets "compréhension conceptuelle" et "maîtrise des procédures" du modèle de Kilpatrick. Les élèves doivent pouvoir répondre à ces questions facilement et rapidement.

Exemples de questions:
- Résoudre l'équation $7x - 3 = 13x + 15$.
- Ecrivez 27 000 000 en notation scientifique.
- Quel est le domaine de la fonction suivante: $f(x) = -\sqrt{6-2x} + 4$?

Il faut savoir qu'une tâche qui est une tâche de reproduction pour un élève d'une classe, parce que la procédure a été beaucoup pratiquée, ne l'est pas forcément pour un élève d'une autre classe. L'enseignant peut déterminer quelle question d'un test appartient à quel niveau de la pyramide. Bien entendu, les objectifs du programme d'études pour les élèves qui doivent résoudre le test fournissent le cadre permettant à l'enseignant de décider du niveau adéquat.

Niveau 2: Sélection d'outils mathématiques

Ce niveau comprend des questions sur la compétence stratégique et la compréhension conceptuelle. Les élèves choisissent les outils mathématiques nécessaires pour résoudre un problème. Des liens sont établis entre différentes représentations, par exemple la capacité d'utiliser des données provenant d'un tableau et d'un diagramme ou d'un graphique pour répondre à une question. Les élèves peuvent résoudre des problèmes simples présentés dans un contexte peu familier.

Quelques exemples:
- Déterminer les points zéro de la fonction $f(x) = x^2 + 2x - 3$

  Il est évidemment plus efficace de résoudre cette question par la méthode de la somme et du produit, mais elle peut aussi être résolue par la formule ABC (méthode des discriminants) ou par les TIC.

- Un plombier doit amener un tuyau droit en acier jusqu'au neuvième étage d'un immeuble. Peut-il prendre l'ascenseur ou doit-il emprunter les escaliers ?

  Les dimensions du tuyau et de l'ascenseur sont données. L'élève peut, par exemple, dessiner la situation à l'échelle ou utiliser le théorème de Pythagore. Les outils mathématiques sont connus, la situation dans laquelle ils doivent être utilisés ne l'est pas..

- Kaan veut fabriquer une boîte rectangulaire de 10 cm de haut et 20 cm de large à partir d'un morceau de carton. Quelles doivent être les dimensions du carton pour que le volume soit le plus grand possible ?

  L'élève peut dessiner la situation pour se faire une idée claire de la question. La variable doit être choisie, ce qui conduit à une fonction qui doit être dérivée pour trouver une valeur maximale. Si ce type de question est régulièrement posé en classe, c'est une question plus facile que lorsqu'elle est présentée pour la première fois. En général, les élèves ont le plus de mal à trouver l'équation correcte de la fonction.

Niveau 3: Généraliser

Ici, les questions portent sur la compréhension conceptuelle, la compétence stratégique et le raisonnement adaptatif. Les questions plus abstraites appartiennent également à ce niveau. L'élève doit comprendre tous les concepts et stratégies mathématiques et doit avoir une attitude positive à l'égard des mathématiques afin de persévérer et de s'attaquer à un problème. Créer et utiliser soi-même un modèle mathématique, raisonner mathématiquement et prouver, réfléchir, faire preuve de perspicacité sont des compétences dont l'élève a besoin pour aborder les questions de ce niveau.

Lorsque les questions de niveau 3 ne sont pas abordées en cours, l'enseignant ne peut pas s'attendre à ce que les élèves puissent répondre à ce type de questions par eux-mêmes. C'est une compétence que l'enseignant doit enseigner aux élèves.

Les exemples de questions comprennent des questions où l'utilisation de procédures standard n'est pas suffisante et où l'élève doit montrer qu'il comprend ce qui a été appris.

Quelques exemples :

- Voici le cercle dont l'équation est $y^2 - 2y + x^2 + 6x - 15 = 0$. Nous appelons $M = (a, b)$ le centre de ce cercle et R son rayon. Déterminer $2a + b + R^2$.

  Source: Ijkingsproef Wiskunde 2014, collaborating Flemish universities.

- Calculer pour quelle(s) valeur(s) de p les fonctions $f(x) = 4{,}5x^2 + px$ et $g(x) = -2$ ont un point d'intersection.

De facile à difficile

La pyramide des tests comporte une troisième dimension. Les questions sont classées de facile à difficile. Contrairement à ce que l'on pense parfois, une question plus difficile ne signifie pas automatiquement un niveau plus élevé. Une équation linéaire à résoudre peut être facile grâce à des coefficients entiers mais peut aussi contenir des fractions et donc être plus difficile. Néanmoins, on utilise toujours une procédure de résolution standard qui a été largement pratiquée, et la tâche reste de niveau 1.

Exemple : L'équation $-3x^2 + 2x + 1 = 0$ est plus facile à résoudre que $4x - 5 = 6x^2 - 7$. Dans la seconde, l'élève doit connaître la procédure pour changer les termes afin que le côté gauche ou le côté droit de l'équation devienne 0.

8.5 Formulate questions

A. Éviter les questions à plusieurs niveaux

Les questions à plusieurs niveaux sont un phénomène très courant dans l'évaluation des mathématiques. Les questions à plusieurs niveaux sont des questions qui se suivent et pour lesquelles vous avez besoin des résultats des questions précédentes pour résoudre une nouvelle question. Bien qu'il soit parfois utile de vérifier si les élèves peuvent résoudre une question complexe (en fonction de leur niveau), il est crucial pour la validité d'un test ou d'un examen que les questions soient indépendantes dans la mesure du possible. En effet, les questions à plusieurs niveaux présentent l'inconvénient de bloquer les élèves s'ils ne peuvent pas résoudre une section particulière de la question ou s'ils la résolvent de manière incorrecte.

Si vous incluez une question à plusieurs niveaux, vous pouvez limiter les inconvénients de ce type de question en fournissant des résultats intermédiaires (par exemple, la question "montrez que ... est égal à ..." au lieu de "calculez ..."), ou en divisant une question en deux sous-questions indépendantes, ou encore en prévoyant une issue si une question précédente s'est révélée erronée (par exemple, le message "La question à plusieurs niveaux est une question à plusieurs niveaux") : "si vous n'avez pas trouvé la réponse à la question précédente, vous pouvez demander à l'enseignant, vous ne pouvez alors plus travailler sur cette question précédente).

Si un élève fait une erreur dans une question à plusieurs niveaux, la plupart des enseignants continueront à noter. L'enseignant vérifie alors comment l'élève continue à raisonner et, tout en corrigeant, calcule en tenant compte de l'erreur. Après tout, le raisonnement mathématique de l'élève a du mérite et mérite d'être évalué. Souvent, cependant, une erreur commise conduit à une situation insoluble, à une question ou à une solution qui n'est pas réellement testée et qui est donc telle que l'enseignant ne peut pas l'évaluer.

Enfin, la didactique des mathématiques [Drijvers et al., 2013] fait aussi parfois référence à des questions cachées à plusieurs niveaux ou à des questions imbriquées. Il s'agit de questions dans lesquelles les élèves doivent effectuer de nombreuses sous-étapes différentes pour parvenir à une solution, mais qui ne ressemblent pas du tout à une question à plusieurs niveaux à première vue parce que la question elle-même n'est pas divisée en sous-questions dépendantes. Ce type de question comporte le risque que les élèves soient bloqués assez tôt dans le processus de résolution et qu'ils ne puissent plus montrer ce qu'ils savent faire parce qu'ils n'y parviennent pas. Il est important d'être conscient de ce phénomène et d'éviter autant que possible les questions cachées à plusieurs niveaux ou du moins de limiter les inconvénients de ce type de question.

Nous allons maintenant donner deux exemples de questions à plusieurs niveaux typiques et un exemple de question emboîtée.

<u>Exemple 1</u> : question à plusieurs niveaux

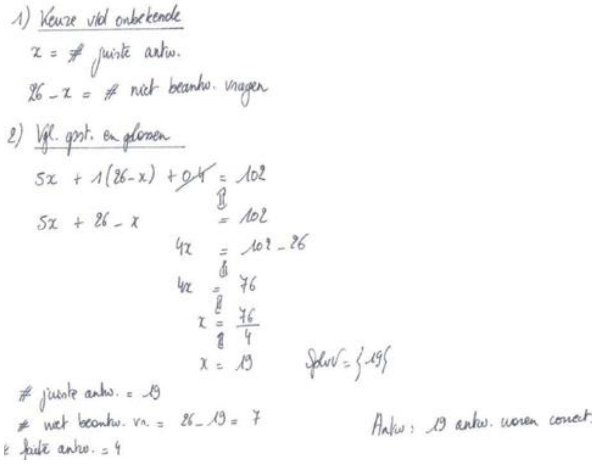
Voici deux fonctions: $f(x) = -x - 4$ et $g(x) = 2x + 1$

1. Détermine $g^{-1}(x)$
2. Détermine $i(x) = (g \text{ o } f \text{ o } g^{-1})(x)$
3. Détermine $i(2)$

L'élève qui n'a pas trouvé la réponse à la sous-question 1 ne peut pas résoudre les questions 2 et 3. Il est préférable de ne pas utiliser g^{-1} dans la sous-question 2 pour évaluer si l'élève comprend le concept de fonctions composées. De même, il est préférable d'utiliser l'une des fonctions données pour évaluer si l'élève peut calculer la valeur d'une fonction à la sous-question 3.

<u>Exemple 2</u> : question imbriquée

Les Olympiades juniors de mathématiques consistent en 30 questions à choix multiples. Pour chaque bonne réponse, vous gagnez 5 points. Bien entendu, vous n'obtenez aucun point pour chaque mauvaise réponse, mais pour chaque question sans réponse, vous gagnez 1 point. Jurgen a obtenu 102 points et a donné 4 mauvaises réponses. Combien de réponses étaient correctes ?



Dans la solution de l'enseignant, vous voyez clairement les trois différentes sous-étapes.:

1. Modéliser le problème.
2. Résoudre l'équation.
3. Donner la réponse finale.

L'élève ne peut pas continuer si l'étape de modélisation n'est pas trouvée ou si elle est si incorrecte qu'il n'y a pas d'équation à résoudre. Sans équation raisonnable à résoudre, la réponse ne peut pas être formulée aussi bien. Il s'agit donc d'une mauvaise question pour évaluer les 3 différents objectifs d'apprentissage.

Exemple 3 : question imbriquée

Résolvez l'inégalité algébriquement $x^3 - 8x + 8 \geq 0$

Les élèves seront bloqués s'ils ne trouvent pas les points zéro. Sans les points zéro, il est impossible de dessiner un tableau de signes correct. Sans le tableau de signes, ils ne peuvent pas résoudre l'inégalité.

B. Alternatives pour les questions à plusieurs niveaux

Une règle générale consiste à se demander s'il est vraiment nécessaire de poser une question à plusieurs niveaux lorsque les réponses à la question précédente sont nécessaires pour résoudre la question. Dans le premier exemple ci-dessus, nous avons proposé des alternatives toutes aussi valables les unes que les autres.

Pour le deuxième exemple, nous présentons quelques alternatives.

1. Remplacez la question ‘Combien de réponses sont correctes ?’ par ‘Etablissez une équation qui permette de résoudre ce problème. Vous ne devez PAS résoudre l'équation.’
2. Remplacez la question ‘Combien de réponses sont correctes ?’ par ‘Montrez algébriquement que 19 est une réponse correcte. Formulez la réponse sous la forme d'une bonne phrase.’
3. Ajoutez la phrase suivante : ‘Si vous ne trouvez pas l'équation, demandez-la à votre professeur.’

Dans une autre question, l'enseignant peut vérifier si les élèves sont capables de résoudre une équation.

Dans le troisième exemple, on peut remplacer la question ouverte par une question fermée (voir 6.3). Par exemple

Pour les questions 1 et 2, il est donné que $f(x) = x^3 - 8x + 8$

1. Calculer algébriquement les points zéro de$f$
2. Fais un tableau de signes pour$f$. *Si vous n'avez pas trouvé les points zéro en 1, vous pouvez utiliser la calculatrice OU demander à votre professeur.*
3. Explain why the sign table in 2 can be used to solve $x^3 - 8x + 8 \geq 0$. *If you did not find the sign table, ask your teacher. Afterwards you may not work on sub question 1 and 2.*
4. Résoudre l'inégalité $x^3 - 8x + 8 \geq 0$
5. Étant donné les fonctions $f(x) = x^3 - 4x$ et $g(x) = 4x - 8$, rechercher pour quelles valeurs de x le graphique f est inférieur à celui de g ($f(x) < g(x)$).

Une quatrième solution consiste à ajouter des questions supplémentaires pour les élèves qui restent bloqués. Par exemple :

Données: $f(x) = -4x^4 - 20x^3 - 13x^2 + 30x - 9$

1. Calculer algébriquement et exactement les points zéro de la fonction polynomiale.
2. Factoriser $f(x)$.

Vous devez maintenant résoudre les deux sous-questions suivantes (3 et 4). Cependant, si vous n'avez pas trouvé les points zéro, résolvez la question 5 au lieu des questions 3 et 4..

3. Créez un tableau de signes de la fonction.
4. Solve: $f(x) < 0$
5. Si vous n'avez pas trouvé 1 et 2:

   Résoudre à l'aide d'un tableau de signes: $(2x + 7)^2(-3x + 2)(x^2 + 6x + 5) \leq 0$

C. Ask short questions

Les questions courtes qui permettent de vérifier si les élèves comprennent ou peuvent résoudre les éléments nécessaires à la résolution d'une question plus vaste ou plus complexe sont idéales pour servir d'introduction ou de ticket de sortie, mais aussi dans le cadre d'un test ou d'un examen. Nous donnons quelques exemples.

<u>Exemple 1</u>

Etablissez la matrice étendue du système d'équations suivant.

$$\begin{cases} 4x - 3y - 5z = 25 \\ x + 5y - 7z = 12 \\ 6x + y - 13z = 43 \end{cases}$$

Il s'agit d'une question facile sur la résolution d'un système d'équations avec la méthode de Gauss-Jordan. Cependant, si les élèves commettent déjà une erreur dans la première étape, le reste de la solution et le travail de notation peuvent s'avérer infernaux.

<u>Exemple 2</u>

Notez l'ensemble de solutions du système d'équations avec la "matrice résolue" suivante:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -7 \end{array}\right]$$

Cette question teste si les étudiants peuvent formuler la réponse à un système avec un nombre infini de solutions. La formulation d'un ensemble de solutions est une étape difficile dans ce type de systèmes que les étudiants oublient souvent. Ce type de question courte permet de mettre en évidence cette partie de la solution.

<u>Exemple 3</u>

Faites un croquis de ce qui est donné et de ce qui est demandé dans l'exercice suivant. Vous n'êtes pas obligé de résoudre la question : ‘*Kaan construit des bungalows en bois qui ont une façade et un arrière triangulaires et un sol rectangulaire. Le triangle a une hauteur de 5 mètres et une largeur de 8 mètres. Le plancher rectangulaire a une longueur de 10 mètres. Le mur avant triangulaire doit comporter une porte vitrée rectangulaire aussi grande que possible. Quelles sont les dimensions de cette porte vitrée ?*’

<u>Exemple 4</u>

Complétez :

$$\cos(\pi - \alpha) = \qquad ; \tan(\pi + \alpha) = \qquad ; \sin(-\alpha) =$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \qquad ; \sin(3\pi - \alpha) = \qquad ; \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

En guise de question bonus, on pourrait demander : Simplifiez l'expression suivante:

$$\frac{\cos(\pi - \alpha).\tan(\pi + \alpha).\sin(-\alpha)}{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}).\sin(3\pi - \alpha).\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha)} =$$

Vous trouverez parfois la question bonus dans un test ou un examen. Ci-dessus, cette question a été transformée en question fermée. Les différentes parties ne dépendent pas les unes des autres et testent des objectifs différents. Les 3 premières sous-questions testent la connaissance des formules des angles connexes. Les 3 sous-questions suivantes demandent aux étudiants d'appliquer ces formules à un niveau de base. La question bonus vérifie s'ils peuvent les intégrer correctement dans un ensemble plus grand et s'ils peuvent simplifier des fractions.

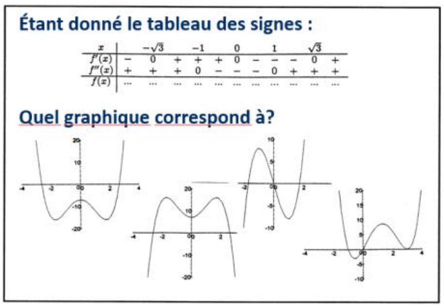
Nous avons trouvé cette question dans un examen de la ‘Examencommissie secundair onderwijs van de Vlaamse Gemeenschap’, une institution qui organise des examens pour tous ceux qui, pour une raison ou une autre, n'ont pas obtenu de diplôme dans le système éducatif normal, par exemple en raison d'une lassitude scolaire ou d'un choix délibéré d'éducation à domicile.

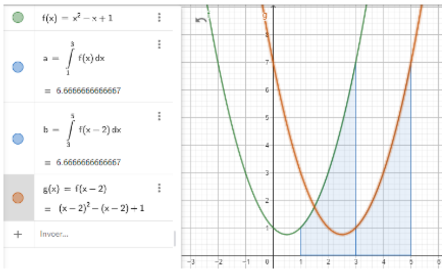
<u>Exemple 5</u> : question à choix multiple

Données $\int_1^3 f(x)dx = 2.4$. Qu'est-ce que $\int_3^5 f(x)dx$

1. 0,4
2. 2,4
3. 4.4

<u>Exemple 6</u> : question à choix multiples 2

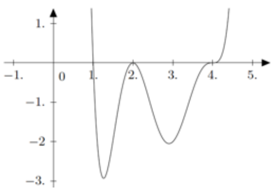




Les questions à choix multiples ci-dessus sont bonnes parce qu'elles testent la perspicacité. Dans l'exemple 5, il faut comprendre que la deuxième intégrale peut être résolue par substitution, ce qui implique une traduction. L'exemple 6 teste la compréhension de la signification des dérivées première et seconde sans calcul. Certes, la présentation de cette question pourrait être améliorée. L'exemple 7 ci-dessous est un exemple d'un type particulier de questions à choix multiples. Une question vrai-faux donne deux choix à l'élève. Bien sûr, il y a le risque de deviner où l'élève a 50% de chances de deviner correctement. En demandant une explication, vous augmentez la qualité de la question de compréhension, mais la question ne peut plus être considérée comme une question courte.

<u>Exemple 7</u> : Question vrai-faux

Considérons le graphique. Quelles opérations sont vraies ou fausses ?



	True	False
a) 2 is a root with even multiplicity.		
b) 4 is a simple root.		
c) 1 is a simple root.		
d) The degree of this polynomial function is at most 3.		
e) The polynomial function can have degree 10.		
f) The polynomial function can have degree 5.		

D. Poser des questions qui mettent à l'épreuve les connaissances mathématiques

Les questions qui sondent la compréhension conceptuelle, la compétence stratégique et le raisonnement adaptatif (voir 3.2) sont généralement des questions de niveau 3 (voir 8.4). Au point 3.3, nous avons souligné l'importance pour les élèves de construire des schémas cognitifs riches. Il ne s'agit pas seulement d'une question de méthode d'enseignement en classe, mais aussi de pratique d'évaluation. Cela nécessite un type différent de questions de test et un type différent d'exercices. Nous donnons quelques exemples pour nous inspirer.

Exemples - les élèves expliquent les concepts

Au lieu de demander des définitions que les élèves peuvent littéralement mémoriser (ce qui relève donc davantage des connaissances procédurales et des questions de niveau 1), les questions suivantes testent la compréhension d'une définition ou (d'une partie) d'un exercice.

<u>Exemple 1</u>

'L'intégrale est une somme infinie.'

A cette affirmation, on trouve les deux formules suivantes dans le cours:

$$\text{si } n\to\infty \text{ puis } f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \to \int_a^b f(x)dx$$

Expliquer la signification du terme $f(x_2)\Delta x$ de la somme.

<u>Exemple 2</u>

Chaque fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a \in \mathbb{R}_0$ et $b, c \in \mathbb{R}$, est une fonction du second degré.

Pourquoi cette définition exclut-elle que $a = 0$?

<u>Exemple 3</u>

Si Elif obtient l'ensemble des solutions $V = \left\{\frac{2\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$ pour une équation trigonométrique et Tigran obtient $V = \left\{\frac{5\pi}{3} - k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$, obtiennent-ils alors les mêmes solutions ? Expliquez dans vos propres mots.

Exemples - les élèves évaluent les solutions et justifient les étapes

Au lieu de demander aux élèves de résoudre un exercice, ils devraient évaluer une solution donnée. Ils apprennent ainsi à justifier pourquoi certaines étapes sont bonnes ou mauvaises..

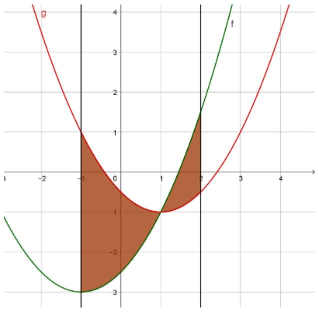
<u>Exemple 1</u>

Pour quelle valeur de x l'affirmation suivante est-elle vraie: $5x - 10 = -3x + 30$? Vous trouverez ci-dessous les réponses de 3 apprenants. Les réponses sont-elles justes ou fausses ? Pourquoi ?

$5x - 10 = -3x + 30$	$5x - 10 = -3x + 30$	$5x - 10 = -3x + 30$
$2x - 10 = 30$	$8x + 10 = 30$	$8x - 10 = 30$
$2x = 20$	$8x = 20$	$8x = 40$
$x = 10$	$x = 2{,}5$	$x = 5$

Source: Handboek Wiskunde didactiek p313 [Drijvers et al., 2013]

Example 2

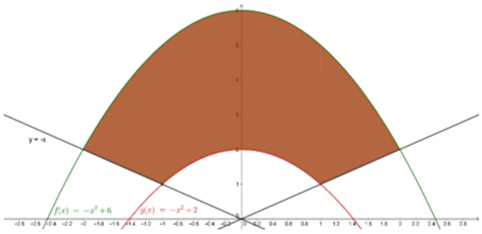


Evaluez la méthode suivante pour trouver la surface ombrée. Est-elle bonne ou mauvaise ? Expliquez votre réponse et utilisez dans votre explication la signification des intégrales des fonctions données..

$$\left[\int_{-1}^{1}\big(g(x)-f(x)\big)dx+\int_{1}^{2}\big(f(x)-g(x)\big)dx\right]$$

Exemple - les élèves choisissent ou évaluent une méthode d'efficacité

Les fonctions suivantes sont données: $y=x,\ y=-x,\ f(x)=-x^2+6$ et $g(x)=-x^2+2$.



a. Indiquez sur le graphique les points dont vous avez besoin pour déterminer l'aire de la région ombrée.

b. Calculez les coordonnées des points dont vous avez besoin pour déterminer l'aire de la région ombrée.

c. Expliquez pourquoi l'expression suivante avec intégrales permet de calculer l'aire de la région ombrée.

$$2\left[\int_{0}^{1}\big(-x^2+6-(-x^2+2)\big)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+6-x)dx\right]$$

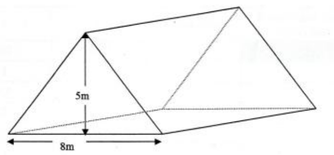
d. Argumentez pour savoir si la méthode de c. est efficace pour calculer la surface ombrée.

E. Demander un plan par étapes

Au lieu de demander aux élèves de résoudre un exercice, ils devraient leur donner les étapes à suivre pour résoudre la question.

Exemple

Faites un plan étape par étape pour résoudre l'exercice suivant : ‘*Kaan construit des bungalows en bois de la forme ci-dessous, d'une hauteur de 5 m, d'une largeur de 8 m et d'une longueur de 10 m. Dans le mur latéral, il y aura une porte vitrée rectangulaire aussi grande que possible. Dans le mur latéral, il y aura une porte vitrée rectangulaire aussi grande que possible. Quelles sont les dimensions de cette porte vitrée* ?’



F. Soyez économe en questions

En cas de doute sur la faisabilité d'un test ou d'un examen dans le temps imparti, il est préférable de supprimer une question ou d'opter pour la différenciation : les élèves qui ont répondu à toutes les questions et qui disposent encore d'un peu de temps peuvent répondre à une question supplémentaire et, éventuellement, obtenir un bonus.

Éviter les questions qui testent les mêmes objectifs du programme d'études. L'un des arguments peut être de donner aux apprenants de multiples opportunités, mais cela n'a aucun sens : un format de question légèrement différent n'aidera probablement pas non plus un apprenant qui n'a pas atteint un objectif particulier (du programme scolaire). De plus, cela rend les tests ou les examens inutilement longs et entraîne des contraintes de temps pour les élèves. L'exemple suivant présente deux questions tirées du même examen de mathématiques pour une classe de 5e (ou de 11e) au niveau supérieur d'une école secondaire. On remarque que c'est exactement la même question qui est posée deux fois et que, de plus, les deux questions sont imbriquées. Bien que l'intention de l'enseignant ait été ici de donner aux élèves de multiples occasions de montrer ce qu'ils savent faire, l'alternative discutée en B est beaucoup plus appropriée.

Question 1

Déterminer algébriquement les points zéro et le tableau de signes de la fonction polynomiale suivante. Ecrivez votre procédure complète, seul un résultat ne vous donne pas de points.

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 1$$

Question 2

Déterminez algébriquement l'ensemble des solutions de l'inégalité ci-dessous. Écrivez votre procédure complète, un seul résultat ne vous donne pas de points.

$$2x^2 - 2x > x^2 - 3x + 6$$

Evitez les doubles questions. Dans l'exemple ci-dessous, l'enseignant veut vérifier, d'une part, si les élèves peuvent résoudre un système d'équations simple à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan. D'autre part, il veut également vérifier s'ils peuvent résoudre des systèmes avec un nombre infini de solutions. Pour éviter que les élèves ne doivent appliquer deux fois l'ensemble de la méthode de Gauss-Jordan à un tel système, il ne les interroge que sur l'ensemble des solutions. C'est aussi l'étape la plus difficile dans ce type de système.

Question 1

Résoudre le système appartenant à la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 & 50 \\ 15 & 20 & 0 & 50 \\ 10 & 10 & 10 & 50 \end{bmatrix}$$

Question 2

Note the solution set belonging to the following matrix.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

G. Question on 'How to start?'

Souvent, lorsque des questions difficiles sont présentées en classe. L'enseignant commence la solution par un DES dans une approche classique. Une fois que la partie difficile du "démarrage" est explorée, les élèves peuvent continuer. De cette façon, ils n'apprennent jamais à commencer à résoudre et à essayer des méthodes, à les rejeter et à recommencer. Il est donc préférable de laisser les élèves essayer de résoudre et de voir ce qu'ils font. Cette activité ne doit pas prendre trop de temps en classe. Disons 5 à 10 minutes maximum. Ensuite, une approche de groupe ou une approche classique suit, au cours de laquelle différentes méthodes sont présentées, analysées et discutées. Qu'est-ce qui est bon ? La méthode nous mène-t-elle quelque part ? Quelles sont les connaissances préalables utilisées ou nécessaires ?

L'enseignant doit avoir la capacité de rassembler les différentes méthodes des élèves qui sont bonnes pour trouver une bonne solution. Dans la mesure du possible, il est très intéressant de conserver plusieurs bonnes solutions. Avec plusieurs bonnes solutions, revenir sur celle(s) qui est (sont) la(les) plus efficace(s) renforce le volet du raisonnement adaptatif

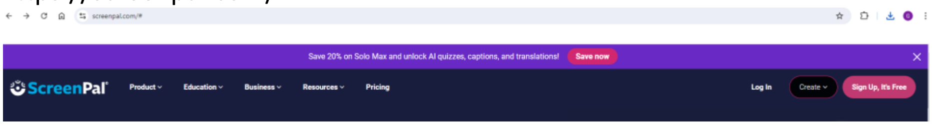
Si, lors d'un test, les élèves reçoivent également une question telle que "Donnez une idée de la manière dont vous pouvez commencer à résoudre l'exercice suivant...". Comme mentionné ci-dessus, donner aux élèves un petit test dans lequel ils doivent commencer à résoudre un exercice en trois minutes est une autre façon de mettre en évidence la capacité à commencer à résoudre un exercice.

9 TIC - intégration

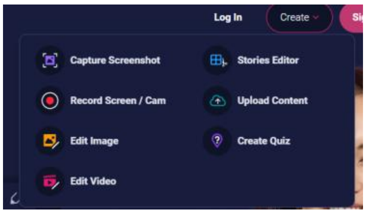
Dans ce paragraphe, nous présentons quelques outils TIC utiles pour les cours de mathématiques à l'aide d'instructions étape par étape afin que le lecteur puisse comprendre l'idée de l'outil.

A. Screenpal

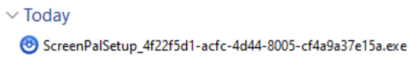
1. Aller à https://screenpal.com/



2. Cliquez sur ‘Create’.



3. Cliquez sur ‘Record Screen/Cam’. Un fichier commence à être téléchargé sur votre ordinateur.
4. Aller aux téléchargements et cliquz sur le ‘exe file’



5. Screenpal démarre.
6. Cliquez sur le bouton rouge REC et vous commencez à enregistrer.

7. Vous remarquez qu'il commence à compter 3, 2, 1 GO ! Et vous pouvez commencer à enregistrer. Regardez cet exemple: https://youtu.be/fcYzKqblT3A
8. Cliquez sur le bouton ‘pause’ pour arrêter l'enregistrement. Vous pouvez écouter ce que vous avez fait.
9. Cliquez sur télécharger et parcourez votre ordinateur pour choisir la carte dans laquelle vous voulez enregistrer le fichier.
10. Cliquez sur ‘Publish’ (Publier). Votre vidéo s'appelle ‘Recording #1’ (Enregistrement #1), sauf si vous lui avez donné un autre nom dans l'écran précédent.
11. Cliquez sur ‘Done’ (Terminé) et trouvez votre vidéo dans la carte que vous avez choisie.

B. PhotoMath sur smartphone

scan with photomath

1. Télécharger l'application ‘PhotoMath’
2. Scannez les expressions suivantes et voyez ce que fait l'application.

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{2} \cdot sin(3x))$$

$$\begin{cases} 3x - y = 21 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\int_1^4 x\,dx$$

$$5x + 10 = 0$$

3. Écrire les expressions ${}^2\log 32$ et $\log_2 32$ sur une feuille de papier. Scannez les deux expressions et voyez ce que fait l'application.

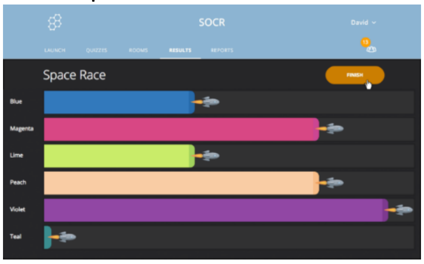
C. Desmos

Desmos est une calculatrice graphique en ligne particulièrement populaire aux États-Unis. L'État du Texas lui-même l'a autorisée comme alternative à la calculatrice graphique. Il existe également une application pour smartphone.

1. Aller à www.desmos.com
2. Choisir un exercice à faire:
    a. Tracez le graphique suivant:
    $y = 3x^2 - 2x$
    b. Tracez le système d'équations suivant:
    $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$
    c. Calculer l'intégrale suivante:
    $\int_2^5 \sin(x)\,dx$

D. Socrative

Avec Socrative, vous pouvez créer un quiz et organiser différentes activités à partir de ce quiz. Les élèves participent à l'activité sur un ordinateur, une tablette ou un smartphone et ne doivent pas s'inscrire. Ils se connectent à la salle des professeurs. L'enseignant peut suivre les réponses des élèves pendant ou après le temps de pratique. Vous pouvez également faire du quiz un devoir à la maison.



1. Aller à www.socrative.com
2. Créer un compte et se connecter.
3. Aller à 'Library' (bibliothèque) et créer un quiz.
4. Lancer un ‘space race’ (course à l'espace).
5. S'il vous reste du temps:
    a. Testez votre course à l'espace entre vous.
    b. Essayer d'autres possibilités pour le même quiz.

E. Quizizz

Avec Quizizz, vous pouvez organiser un quiz où les élèves s'affrontent en résolvant le plus rapidement possible des questions préétablies. Les élèves jouent sur un ordinateur, une tablette ou un smartphone et ne doivent pas s'inscrire pour participer au quiz. L'enseignant reçoit un résumé des réponses des élèves après un quiz. Vous pouvez également donner le quiz en guise de devoir.

1. Regardez 10" de la vidéo suivante (1'17 - 1'27): (23) PR Internationalisering 2223 DEF - YouTube
2. Créez un compte sur Quizizz à l'adresse suivante www.quizizz.com
3. Créer un quiz avec différents types de questions. Incorporez au moins 3 des types suivants:
    a. 1 question à choix multiple,
    b. 1 question à case à cocher,
    c. 1 question à compléter,
    d. 1 question ouverte.

    Besoin d'aide ? Regardez la vidéo suivante https://www.youtube.com/watch?v=52Y0FUNjNBs et/ou https://www.youtube.com/watch?v=_Ct8X6VrEuE
4. Vous avez encore du temps ? Veillez à ce que le quiz puisse être joué comme une compétition entre les élèves.



F. Padlet

Un ‘Padlet’ est un tableau d'association qui peut être utilisé dans vos cours..

1. Aller à https://nl.padlet.com et s'inscrire.
2. Créez un Padlet pour une question que vous pourriez utiliser dans une leçon..

G. Codes QR

Les codes QR sont synonymes de réponse rapide. Tout comme les codes-barres au supermarché, vous scannez les codes QR. Par exemple, un code QR peut contenir un lien vers un site web, que vous visitez immédiatement lorsque vous scannez le code QR. D'un point de vue pédagogique, cela peut être très utile pour rendre votre cours écrit plus accessible grâce aux codes QR (mise à disposition des clés de solution, travail différencié...).

1. Recherchez un ‘générateur de QR’ sur Internet.
2. Créez un code QR pour, par exemple, une vidéo éducative sur YouTube, un site web intéressant, un message que vous avez fait....
3. Téléchargez le fichier contenant l'image du code QR et placez-le dans un document Word.
4. Téléchargez un lecteur QR sur votre téléphone portable et essayez votre code.

H. ChatGPT

1. Allez à chat.openai.com et “s’inscrire » ou "sign in"/"log in" si vous avez un compte.
2. Posez la question suivante : "La dérivée de la fonction $f(x) = Arcsinx$, est-elle $f'(x) = 3x^2$?’
3. Poser une question mathématique. Analysez la réponse de manière critique et posez une question complémentaire si nécessaire.
4. Insérez l'invite suivante : ‘Donnez-moi des exercices incorrectement résolus sur des équations de deuxième année au niveau d'une jeune fille zambienne/africaine du Sud de 15 ans.’ Répondez que vous n'êtes pas d'accord avec la réponse et expliquez pourquoi. Analysez la réponse de ChatGPT.