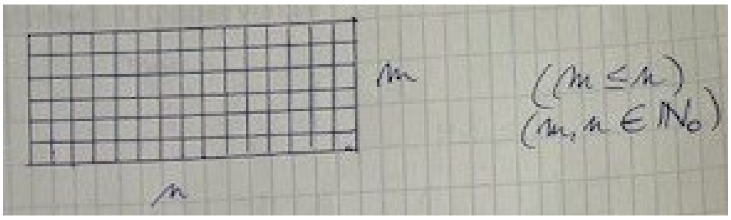
Le problème :

Le sol d'une pièce rectangulaire est recouvert de carreaux carrés (entiers). La pièce a une largeur de $m$ carreaux et une longueur de $n$ carreaux. La moitié des carreaux sont sur le bord. Pour combien de tailles de pièces cela est-il possible ?

(A) aucun (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) plus que 3

(Source: Flemish Mathematics Olympiad volume 1996, 2e round, question 18)

Les détails sont indiqués dans le dessin ci-contre.




De plus, il est donné que la moitié des carreaux se trouve sur le côté de la pièce. Donc sur la longueur et la largeur du rectangle.

Solution :

Le nombre total de carreaux est $m.n$. La moitié est donc $\frac{m \cdot n}{2}$ (1)

Le nombre de tuiles sur le bord est $2m + 2n - 4$ (2). En effet, les quatre tuiles du coin comptent double si l'on part de $2m + 2n$ pour déterminer les tuiles du bord.

Un autre raisonnement est qu'il y a $2m$ carreaux sur la largeur de la pièce et ensuite 2 fois $n - 2$ carreaux sur les 2 longueurs. L'expression devient alors: $2m + 2(n - 2) = 2m + 2n - 4$.

Si ce nombre doit être égal à la moitié du nombre total de tuiles, alors l'égalité s'applique:

$$2m + 2n - 4 = \frac{m \cdot n}{2} \quad ((2) = (1))$$

Nous exprimons $m$ en fonction de $n$ mais, bien sûr, cela peut aussi se faire en sens inverse.

$$2m + 2n - 4 = \frac{m \cdot n}{2} \Leftrightarrow 4m + 4n - 8 = m \cdot n \Leftrightarrow 4m - m \cdot n = 8 - 4n$$

$$\Leftrightarrow m(4 - n) = 8 - 4n \Leftrightarrow m = \frac{8 - 4n}{4 - n}$$

Nous savons que $m \leq n$ et que les deux nombres sont des entiers naturels mais ne sont pas égaux à 0. Puisque le dénominateur est $4 - n$, nous avons $4 - n \neq 0 \Leftrightarrow n \neq 4$.

Les nombres naturels sont discrets car nous pouvons les examiner "tous" dans un tableau. Nous choisissons des valeurs naturelles pour $n$ et calculons la valeur correspondante pour $m$ .

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | … | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $\frac{4}{3}$ | 0 | -12 | / | 12 | 8 | $\frac{8}{3}$ | 6 | $\frac{28}{5}$ | $\frac{16}{3}$ | $\frac{36}{7}$ | 5 | $\frac{44}{9}$ | $\frac{24}{5}$ | | 4 |

Nous constatons que seules quelques valeurs naturelles apparaissent. De plus, nous constatons que les nombres suivants que nous calculons pour $m$ à $n > 12$ ne donnent plus d'entier naturel. Nous pouvons le confirmer avec la limite: $\lim_{n \to +\infty} \frac{8-4n}{4-n} = \lim_{n \to +\infty} 4 = 4$. Le graphique fournit des informations supplémentaires sur la fonction réelle et confirme que nous pouvons conclure à partir du tableau que seules 2 situations sont possibles.

Réponse : l'option C est la bonne réponse.