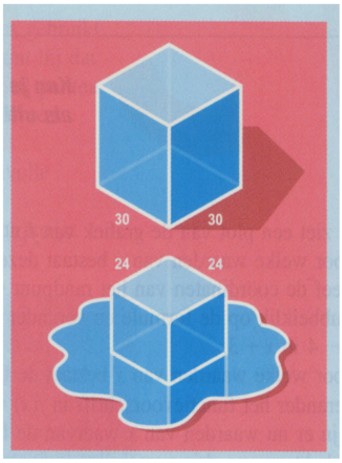
Exercice A : le glaçon

Un glaçon avec des arêtes de 30 mm commence à fondre lentement. Chaque minute, les arêtes deviennent plus courtes de 1,5 mm. Le volume du glaçon est décrit par la formule :
$V = (30 - 1{,}5t)^3$ où V est le volume en millimètres cubes et t le temps en minutes.

a. Calculez le volume du glaçon à $t = 0$.
b. Quelles sont les valeurs significatives pour t ? Et pour V ?
c. Tracez et esquissez la partie du graphique où les deux variables ont une signification.
d. Suivez le curseur sur le graphique et déterminez après combien de minutes le volume est inférieur à 10 000 mm³.
Donnez votre réponse avec une précision d'une décimale.



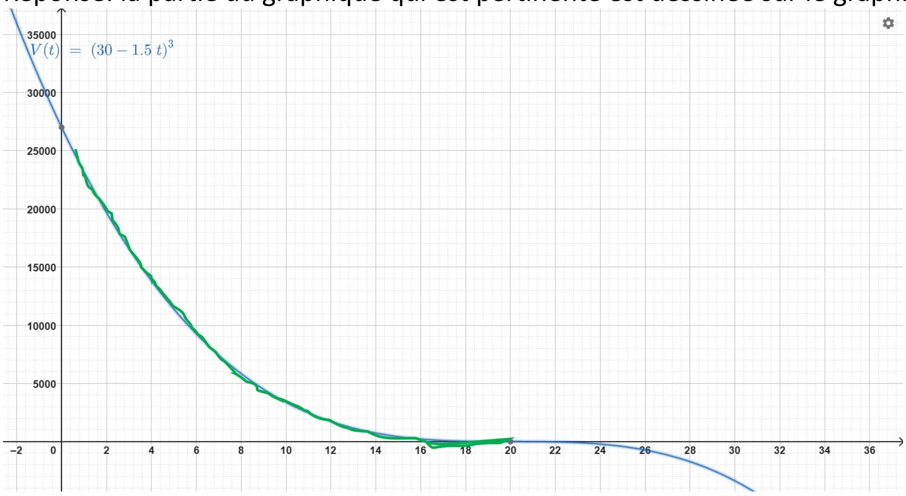
Données:

- un glaçon cubique avec des côtes de 30 mm ;
- chaque minute, le glaçon fond de telle sorte que les côtes se raccourcissent de 1,5 mm.
- Le volume V du glaçon en mm en fonction du temp t en minutes est $V(t) = (30 - 1{,}5t)^3$

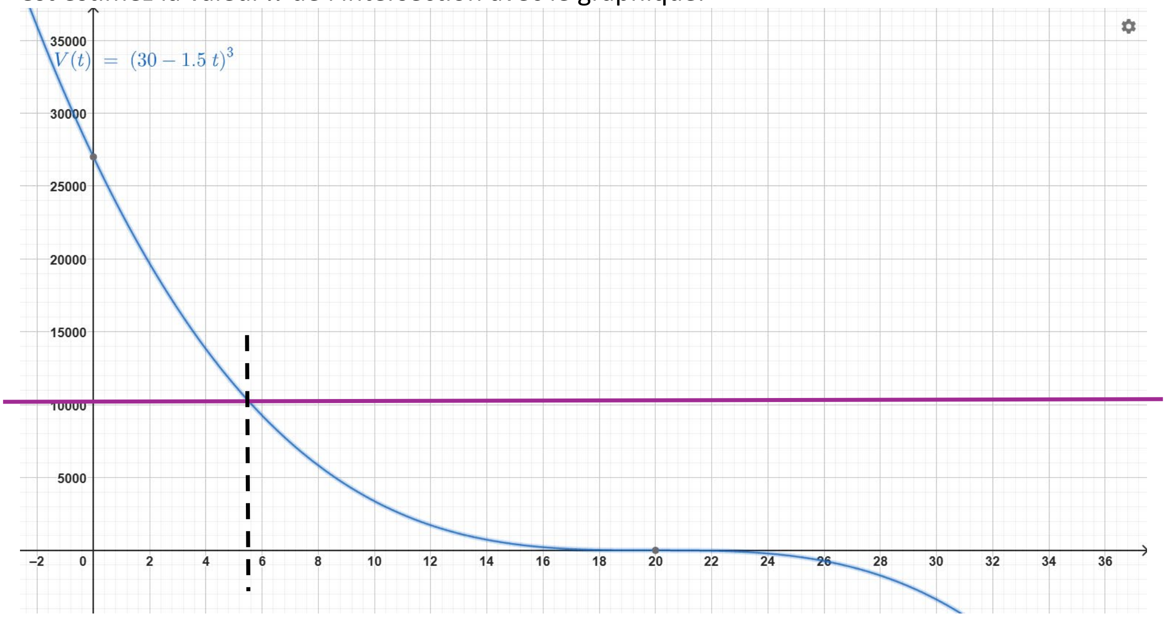
a. $V(0) = (30 - 1{,}5 \cdot 0)^3 = 30^3 = 27\,000$
Réponse : Le volume du glaçon au départ est de 27000 mm^3 ou 2,7cm^3.

b. Un temps négatif et un volume négatif n'ont pas de sens. Il faut donc $t \geq 0$ est $V \geq 0$
Nous cherchons à savoir quand $V = 0$
$$V(t) = 0 \Leftrightarrow (30 - 1{,}5t)^3 = 0 \Leftrightarrow 30 = 1{,}5t \Leftrightarrow t = 20.$$
Réponse: $t \in [0,20]$ est $V \in [0,27000]$

c. Réponse: la partie du graphique qui est pertinente est dessinée sur le graphique en vert:



d. Nous résolvons cette question à la fois graphiquement et algébriquement.
L'enquête graphique ne donne pas de valeur exacte. Pour cela, nous traçons la ligne $y = 10000$ est estimez la valeur x de l'intersection avec le graphique.



Nous estimons qu'à partir de $t = 5{,}3$, c'est-à-dire après 5.3 minutes, le volume est inférieur à $10000mm^3$

Algébrique: $V(t) < 10000 \Leftrightarrow (30 - 1{,}5t)^3 < 10000$

$$\Leftrightarrow 30 - 1{,}5t < 10\sqrt[3]{10} \Leftrightarrow 30 - 10\sqrt[3]{10} < 1{,}5t \Leftrightarrow 8{,}46 < 1{,}5t$$

$$\Leftrightarrow 5{,}64 < t.$$

Nous devons arrondir le nombre 5,64 car le volume doit être inférieur à 10000. En effet, si $t = 5{,}6$ minutes, le volume n'est pas encore inférieur à $10000mm^3$

Réponse: Le volume du glaçon sera inférieur à $10000mm^3$ après 5,7 minutes.

Exercice B: Température dans un local de stockage frais

La température d'une chambre froide est donnée par la fonction suivante:

$$T(t) = \frac{3t^2-6t+3}{t^2-2t+2}$$

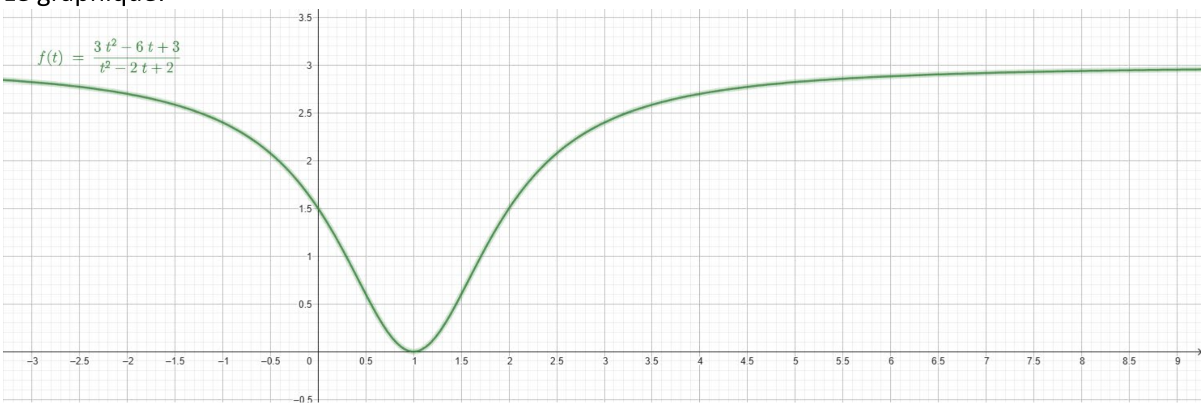
T = température (°C); t = temps (en heures); t = 0 correspond à 3 heures due matin.

a. Tracer le graphique de cette fonction
b. Si la température descend en dessous de 1 °C, les aliments risquent d'être endommagés. Pendant combien de temps la température est-elle restée inférieure à 1 °C ? De quand à quand ?
c. Quand la température a-t-elle recommencé à augmenter ?
d. À quelle température le stockage au frais évolue-t-il ?

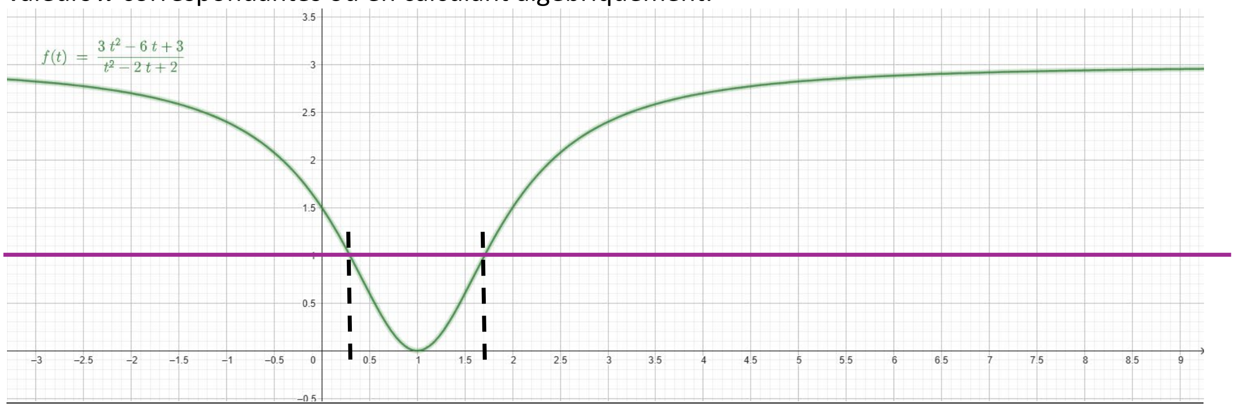
Données:

- La température (°C) en fonction du temps (heures) est $T(t) = \frac{3t^2-6t+3}{t^2-2t+2}$
- Nous commençons à mesurer à $t = 0$ et il est alors 3 heures du matin. Nous ne connaissons pas la date, seulement l'heure dans une journée .

a. Le graphique:



b. Sur le graphique, nous pouvons estimer approximativement la durée pendant laquelle la température descend en dessous de 1°C en traçant une ligne horizontale $y = 1$ et en lisant les valeurs x correspondantes ou en calculant algébriquement.



Nous lisons que cela se situe approximativement entre $0{,}3\ heure$ et $1{,}7\ heure$.
$0{,}3\ heure = 0{,}3 \cdot 60 = 12\ minutes$ et $1{,}7\ heure = 1{,}7 \cdot 60 = 104\ minutes = 1h44\ minutes$.
Comme $t = 0$ correspond à 3 heures du matin, la température de la chambre froide est inférieure à 1°C entre 3h12' et 4h44'.

Nous calculons maintenant cela algébriquement.

$$T(t) = \frac{3t^2 - 6t + 3}{t^2 - 2t + 2} < 1 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t + 3 < t^2 - 2t + 2 \Leftrightarrow 2t^2 - 4t + 1 < 0$$

Nous calculons où $t = 0$ en utilisant la méthode discriminante: $D = 16 - 8 = 8$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}71 \quad \text{of} \ 0{,}29$$

Nous lisons sur le graphique qu'entre ces valeurs de t , il passe en dessous de la ligne horizontale $y = 1$. Algébriquement, nous devons vérifier le tableau des signes pour cela et en effet, puisque $a > 0$, le signe entre les points zéro sera négatif ($2t^2 - 4t + 1 < 0$), ce qui signifie $T(t) < 1$.

Pour question 1: $1{,}71 - 0{,}29 = 1{,}42 = 1h + 0{,}42 \cdot 60' = 1h25'$

Pour question 2: $1{,}71 = 1 + 0{,}71 \cdot 60 = 1h43'$ en $0{,}29 \cdot 60 = 17{,}4 = 17'$

Réponses:

1. La température est restée inférieure à 1°C pendant 1 heure et 25 minutes.
2. Cela va d'environ 3h17 à 4h43

c. Sur le graphique, on lit que la température descend jusqu'à 0 avant de remonter. Nous calculons donc quand $T(t) = 0$, pour cela, le numérateur de la fraction doit être 0. Ainsi, $3t^2 - 6t + 3 = 0$ $\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Pour le calculer algébriquement de manière exacte, il faut voir où $T(t)$ a un minimum et donc calculer la dérivée:

$$T'(t) = \frac{(t^2 - 2t + 2) \cdot (6t - 6) - (2t - 2)(3t^2 - 6t + 3)}{(t^2 - 2t + 2)^2}$$

$$= \frac{6(t^2 - 2t + 2) \cdot (t - 1) - 3(2t - 2)(t - 1)^2}{(t^2 - 2t + 2)^2}$$

$$= \frac{3(t - 1)(2t^2 - 4t + 4 - (2t - 2)(t - 1))}{(t^2 - 2t + 2)^2}$$

$$= \frac{3(t - 1)(2t^2 - 4t + 4 - 2t^2 + 2t + 2t - 2)}{(t^2 - 2t + 2)^2} = \frac{6(t - 1)}{(t^2 - 2t + 2)^2}$$

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{6(t - 1)}{(t^2 - 2t + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Pour savoir s'il s'agit bien d'un minimum, nous effectuons un test de signe de cette dérivée. Le numérateur est 0 si $t = 1$, le dénominateur n'est jamais nul car $D = 4 - 8 = -4 < 0$

t		1	
$T'(t)$	-	0	+
$T(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Le calcul algébrique montre également que la température atteint un minimum de 0°C après 1 heure et commence à augmenter à partir de ce moment.

Réponse: À partir de 4 heures du matin, la température de la chambra froide recommence à augmenter.

d. Graphiquement, on constate que lorsque t augmente, le graphique évolue vers 3. Algébriquement, nous calculons la limite de ce phénomène lorsque t va à l'infini.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{3t^2 - 6t + 3}{t^2 - 2t + 2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{3t^2}{t^2} = \lim_{t \to +\infty} 3 = 3$$

Réponse: La température de la chambra froide sera d'environ 3°C au fil du temps.

Exercice C: Pelouse dans le jardin de M. Jones.

La pelouse dans le jardin de M. Jones mesure 15 sur 20 mètres. M. Jones décide d'agrandir la pelouse. Il ajoute une bande de même largeur de x mètres sur deux côtés. (Voir Figure 7.16.)

a. Montrez que la surface de la pelouse agrandie est donnée par $Aire = x^2 + 35x + 300$

b. La nouvelle pelouse a une surface de 374 m². Établissez une équation et calculez la largeur de la bande.

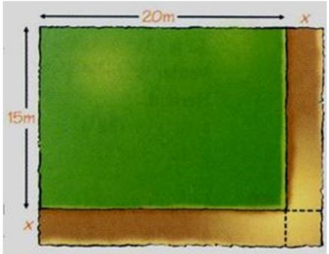


Fig. 7.16

Données:

- La pelouse est rectangulaire et mesure 15 m de large et 20 m de long.
- M. Jones réensemence une parcelle de xm de large sur deux côtés de la pelouse rectangulaire.

a. La largeur de la nouvelle pelouse est de $15 + x$ et la longueur de $20 + x$. Par conséquent, la surface (A de "area") est de $A(x) = (15 + x)(20 + x) = 300 + 15x + 20x + x^2 = x^2 + 35x + 300$.

b. Si $x^2 + 35x + 300 = 374 \Rightarrow x^2 + 35x - 74 = 0$

$$D = 35^2 + 4 \cdot 74 = 1521$$

$$x = \frac{-35 \pm \sqrt{1521}}{2} = \frac{-35 \pm 39}{2} = 2 \ \ of - 37$$

Comme x est un nombre réel, nous rejetons la solution $x = -37$

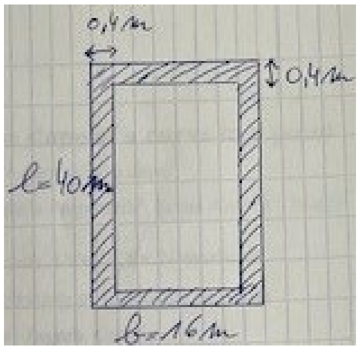
Réponse: La largeur de la bande supplémentaire est de $2m$

Exercice D: M. Cook tond sa pelouse.

M. Kok a une pelouse de 16 m sur 40 m. Sa tondeuse coupe une bande de 40 cm de large. Il commence à tondre par l'extérieur et suit le périmètre. Après combien de tours a-t-il tondu la moitié de la surface ?

Données :

- La pelouse de M. Kok a une largeur de 16 m et une longueur de 40 m. Elle est rectangulaire.
- La tondeuse tond sur une largeur de 40 m.



À droite, nous avons d'abord fait un croquis de ces données.

Pour savoir quand la moitié de la pelouse a été tondue, nous devons connaître la superficie de l'ensemble du terrain. Celle-ci est $16 \cdot 40 = 640$. La demi-zone est donc $320m^2$

Nous devons chercher à savoir si la tondeuse a coupé $320m^3$, car il reste $320m^3$ à couper.

Après le premier tour, la tondeuse a tondu cette zone : $0{,}4 \cdot 16 \cdot 2 + 0{,}4 \cdot (40 - 2 \cdot 0{,}4) \cdot 2$

La partie non coupée a maintenant $b = 16 - 2 \cdot 0{,}4 = 15{,}2$ et $l = 40 - 2 \cdot 0{,}4 = 39{,}2$. La surface est donc $(16 - 2 \cdot 0{,}4) \cdot (40 - 2 \cdot 0{,}4) = (16 - 0{,}8) \cdot (40 - 0{,}8)$

On constate une relation entre le tour 1 et la superficie dans ce calcul de la superficie. Par conséquent, nous déterminons maintenant pour chaque tour l'aire de la partie non coupée.

Après le deuxième tour, la largeur de la partie non coupée est de $b = 15{,}2 - 2 \cdot 0{,}4 = 14{,}4$ et $l = 39{,}2 - 2 \cdot 0{,}4 = 38{,}4$.

À chaque fois, nous analysons ce qui se passe dans les calculs que nous avons effectués pour l'utilité. En effet, nous devons trouver une formule qui exprime la relation entre le nombre de tours et la surface.
Après tour 1 est l'aire de la partie non coupée: $15{,}2 \cdot 39{,}2 = (16 - 0{,}8) \cdot (40 - 0{,}8) = (16 - 1 \cdot 0{,}8) \cdot (40 - 1 \cdot 0{,}8)$
Après tour 2 est l'aire de la partie non coupée: $14{,}4 \cdot 38{,}4 = (15{,}2 - 0{,}8) \cdot (39{,}2 - 0{,}8) = (16 - 0{,}8 - 0{,}8) \cdot (40 - 0{,}8 - 0{,}8) = (16 - 2 \cdot 0{,}8) \cdot (40 - 2 \cdot 0{,}8)$
Après tour x la surface de la partie non coupée sera donc de $(16 - x \cdot 0{,}8) \cdot (40 - x \cdot 0{,}8)$. Quand cette aire est-elle $320m^2$?

$$(16 - x \cdot 0{,}8) \cdot (40 - x \cdot 0{,}8) = 320 \Leftrightarrow 640 - 12{,}8x - 32x + 0{,}64x^2$$
$$= 320 \Leftrightarrow 0{,}64x^2 - 44{,}8x + 320 = 0$$

$$D = 44{,}8^2 - 819{,}2 = 1187{,}84$$

$$x = \frac{44{,}8 \pm \sqrt{1187{,}84}}{2 \cdot 0{,}64} = 61{,}93 \quad \text{of} \ 8{,}07$$

Le nombre de tours ne peut pas être 61,93, car la nouvelle largeur et la nouvelle longueur seraient alors inférieures à 0 : $16 - 61{,}93 \cdot 0{,}8 < 0$ en $40 - 61{,}93 \cdot 9{,}8 < 0$. Nous devons donc rejeter cette solution. La multiplication de ces deux valeurs négatives donne quand même 320.

8,07 indique que M. Kok doit faire un peu plus de 8 tours pour être à mi-chemin. Par conséquent, nous arrondissons à 9 tours.

Réponse : M. Kok est à moitié tondu après 9 tours.