La multiplication des matrices

Texte basé sur "Matrices d'applications" (en néerlandais)

'Wiskunde vanuit toepassingen: functies en matrices als modellen', J. Roels, J. Deprez, D. Janssens, D. De Bock; 1990 KU Leuven Aggregatie hoger secundair onderwijs wiskunde. p164-168)

La multiplication des matrices n'est pas si évidente. D'ailleurs, pourquoi multiplie-t-on les matrices de cette façon? Lorsque nous demandons aux élèves de trouver une définition pertinente de la multiplication des matrices, personne ne propose la "bonne" méthode. De plus, les élèves ne peuvent-ils pas découvrir cette multiplication par eux-mêmes? Certains manuels de mathématiques flamands appliquent la multiplication avec des matrices de stock. Dans le texte de travail suivant, les élèves découvrent par eux-mêmes la méthode de multiplication des matrices dans le cadre d'une étude de marché. Avant de passer à la multiplication générale après la tâche 12, il est préférable de discuter de quelques exemples concrets afin que les élèves aient l'impression que cette méthode de multiplication est courante.

Fiche de travail: une étude de marché

Une association de consommateurs organise la promotion suivante. Pour chaque nouveau membre, on détermine quel est le grand magasin le moins cher pour ses achats hebdomadaires (une étude a montré qu'il n'est pas avantageux d'acheter les produits les moins chers dans chaque grand magasin : le trajet vers les différents grands magasins doit être inclus dans la dépense totale). Pour ce faire, l'association de consommateurs a relevé les prix d'un grand nombre de produits de base dans différents grands magasins. Vous trouverez ces données dans le tableau suivant :

Produits Patates	**Dellijs**	**Soussi Marché**	**Heebee**	**Ilda-marché**
Patates douces (€/kg)	3,5	2,5	4	3
Carottes (€/kg)	1,59	1,4	1,3	1,24
Pain (€/pièce)	2,55	1,85	2,29	2,9
Eau gazeuse (€/bouteille 1l)	1	0,85	0,95	0,9
Feta (€/kg)	16,09	15,77	25	16,99

1. Combien payez-vous 5 kg de patates douces au Soussi marché?

Dans la pratique, il s'agit bien sûr de beaucoup plus de produits et de grands magasins. C'est pourquoi les données seront traitées par ordinateur. Nous examinerons cette partie limitée afin de pouvoir refaire les calculs à la main. Lorsque vous vous inscrivez comme nouveau membre de l'association de consommateurs, vous pouvez nous dire combien vous consommez de ces produits de base par semaine. On calcule alors quel grand magasin est le moins cher pour ces achats. Supposons, par exemple, que la famille Dusangabe utilise les quantités suivantes de ces produits en moyenne par semaine :

- 3 kg de patates douces
- 2 kg de carottes
- 10 pains
- 5 bouteilles d'eau gazeuse
- 0,5 kg de feta

2. Entoure un supermarché de ton choix : Dellijs, Soussi Marrché, Heebee, Ilda marché.

3. En fonction de ces produits, calculez combien la famille Dusangabe dépenserait par semaine dans le supermarché de votre choix.

4. Faites appel à des élèves de classe qui ont choisi un autre supermarché pour affiner vos calculs et répondre à la question suivante : Sur la base de vos calculs, quel supermarché recommanderiez-vous à la famille Dusangabe et pourquoi ?

Notation matricielle

Pour résoudre la question 4, vous avez dû effectuer 4 calculs. Dans la pratique, vous devez évidemment en faire beaucoup plus. Mais avec un ordinateur, cela ne pose aucun problème. Nous allons chercher une manière systématique de calculer pour que cela puisse être automatisé et donc programmé.

5. Les données relatives aux différents prix des produits peuvent être conservées de manière ordonnée dans une matrice. Créez une matrice. Vous avez beaucoup de choix pour cela.

Vérifiez si vous reconnaissez votre matrice dans la matrice suivante avec laquelle nous continuerons à travailler dans ce fiche de travail :

$$\begin{bmatrix} 3{,}5 & 1{,}59 & 2{,}55 & 1 & 16{,}09 \\ 2{,}5 & 1{,}4 & 2{,}29 & 0{,}95 & 15{,}77 \\ 4 & 1{,}3 & 1{,}85 & 0{,}85 & 25 \\ 3 & 1{,}24 & 2{,}9 & 0{,}9 & 16{,}99 \end{bmatrix}$$

6. Dans chaque cas, complétez les informations dans la ligne ou la colonne correspondante ci-dessous.
   a. Lignes:
      Ligne 1: Ligne 2:
      Ligne 3: Ligne 4:
   b. Colonnes:
      Colonne 1: Colonne 2:
      Colonne 3: Colonne 4: Colonne 5:

7. Vous pouvez également enregistrer la "consommation" et les "dépenses" dans une matrice. Faites quelques suggestions.
   a. Consommation

   b. Dépenses

8. Dans le point 7, vous avez utilisé une matrice spéciale. Entourez celles que vous avez faites :
   a. Consommation : matrice colonne, matrice ligne

   b. Dépenses : matrice colonne, matrice ligne

Dans ce qui suit, nous continuons avec les matrices suivantes :

consommation dépenses

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \\ 5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 52{,}23 \\ 45{,}84 \\ 49{,}85 \\ 53{,}48 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons la matrice des dépenses en combinant la matrice des prix avec la matrice de la consommation de la famille Dusangabe : c'est ce qu'on appelle multiplier.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Dellijs} \\ \text{Soussie} \\ \text{Heedee} \\ \text{Ilda} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Patates} & \text{carottes} & \text{pain} & \text{eau g} & \text{feta kaas} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3.5 & 1.59 & 2.55 & 1 & 16.09 \\ 2.5 & 1.4 & 2.29 & 0.95 & 15.77 \\ 4 & 1.3 & 1.85 & 0.85 & 25 \\ 3 & 1.24 & 2.9 & 0.9 & 16.99 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \\ 5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{kg patates douces} \\ \text{kg de carottes} \\ \text{pain} \\ \text{bouteilles d'eau gazeuse} \\ \text{kg de feta} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 52{,}23 \\ 45{,}84 \\ 49{,}85 \\ 53{,}48 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Dellijs} \\ \text{Soussie} \\ \text{Heedee} \\ \text{Ilda} \end{array}$$

Bien sûr, on ne mentionnera pas toujours les produits et les grands magasins.

Comment trouver, par exemple, le troisième élément de la matrice des dépenses, les dépenses à Heedee ? Pour cela, il faut multiplier les éléments de la troisième ligne de la matrice des prix (les prix à Heedee) par les éléments correspondants de la matrice de consommation et additionner les résultats.

Les dépenses totales à Heedee s'élèvent à: $4 \cdot 3 + 1{,}3 \cdot 2 + 1{,}85 \cdot 10 + 0{,}85 \cdot 5 + 25 \cdot 0{,}5 = 49.85$

Calcul de la matrice complète des dépenses de la famille Dusangabe (avec matrixcalc.org):

$$\begin{pmatrix} 3.5 & 1.59 & 2.55 & 1 & 16.09 \\ 2.5 & 1.4 & 2.29 & 0.95 & 15.77 \\ 4 & 1.3 & 1.85 & 0.85 & 25 \\ 3 & 1.24 & 2.9 & 0.9 & 16.99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \\ 5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5\cdot3+1.59\cdot2+2.55\cdot10+1\cdot5+16.09\cdot(0.5) \\ 2.5\cdot3+1.4\cdot2+2.29\cdot10+0.95\cdot5+15.77\cdot(0.5) \\ 4\cdot3+1.3\cdot2+1.85\cdot10+0.85\cdot5+25\cdot(0.5) \\ 3\cdot3+1.24\cdot2+2.9\cdot10+0.9\cdot5+16.99\cdot(0.5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52.23 \\ 45.84 \\ 49.85 \\ 53.48 \end{pmatrix}$$

Nous ajoutons une deuxième famille. La matrice de consommation de la famille Scheldeman est:

$$\begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 8 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

9. Calculer la matrice des dépenses.

10. Quel grand magasin est le plus avantageux pour la famille Scheldeman ?

11. Les matrices suivantes sont données A et B, calculer $A.B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

12. On donne la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

a. Combien d'éléments une matrice colonne B doit-elle avoir pour être multipliée par la matrice A?

b. Quelle dimension a alors $A \cdot B$?

c. Quelle est la dimension du produit si l'on multiplie une matrice de dimension 1×8 par une matrice de dimension 8×1?

La multiplication des matrices

Revenons un instant sur l'action promotionnelle de l'association de consommateurs. L'association souhaite également utiliser ces données et ces résultats pour une étude générale. C'est pourquoi elle "conservera" tout dans des matrices.

De la consommation des familles Dusangabe et Scheldeman, par exemple, nous pouvons faire une matrice.

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 3 & 2,5 \\ 2 & 1 \\ 10 & 8 \\ 5 & 0 \\ 0,5 & 0.6 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{kg patates douces} \\ \text{kg de carottes} \\ \text{pain} \\ \text{bouteilles d'eau gazeuse} \\ \text{kg de feta} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{Dusangabe} & \text{Scheldeman} \end{array} & \end{array}$$

Nous pouvons également combiner les colonnes de dépenses en une seule matrice.

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 52,23 & 40,39 \\ 45,84 & 35,43 \\ 49,85 & 41,1 \\ 53,48 & 42,13 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Dellijs} \\ \text{Soussie} \\ \text{Heedee} \\ \text{Ilda} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{Dusangabe} & \text{Scheldeman} \end{array} & \end{array}$$

Les deux calculs de multiplication d'une matrice et d'une colonne donnent donc un calcul de produit de deux matrices.

$$\begin{bmatrix} 3,5 & 1,59 & 2,55 & 1 & 16,09 \\ 2,5 & 1,4 & 2,29 & 0,95 & 15,77 \\ 4 & 1,3 & 1,85 & 0,85 & 25 \\ 3 & 1,24 & 2,9 & 0,9 & 16,99 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2,5 \\ 2 & 1 \\ 10 & 8 \\ 5 & 0 \\ 0,5 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52,23 & 40,39 \\ 45,84 & 35,43 \\ 49,85 & 41,1 \\ 53,48 & 42,13 \end{bmatrix}$$

13. Prenez le chiffre de la troisième ligne et de la deuxième colonne de la matrice des dépenses.

a. Quelle est la signification de ce nombre dans le contexte de cette étude de marché?

b. Comment pouvez-vous le calculer?

c. Si vous ne l'avez pas fait en b., expliquez la façon de calculer ce nombre en notation matricielle. Utilisez donc les noms lignes, colonnes, éléments ...

Un conseil : vous pouvez encore avoir besoin de la concrétisation suivante. Inscrivez les noms des magasins, des produits et des familles à la troisième ligne et à la deuxième colonne.

14. Calculer de cette manière $A \cdot B$ si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

15. On donne la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

a. Quelle dimension doit avoir une matrice B pour que l'on puisse calculer $A \cdot B$? Quelle est alors la dimension de $A \cdot B$?

b. Quelle dimension doit avoir une matrice B pour que l'on puisse calculer$B \cdot A$? Quelle est alors la dimension de $B \cdot A$?

c. Sous quelles conditions dimensionnelles peut-on multiplier les matrices de cette manière ??

16. Nous revenons une dernière fois à la promotion. A la matrice que vous avez préparée à la question 5 (prenons ce capital A) donnez une matrice de consommation B de telle sorte que le produit $A \cdot B$ ou $B \cdot A$ donne une matrice avec les dépenses des familles Dusangabe et Scheldeman.

Solutions

Pour la question 9

$$\begin{pmatrix} 3.5 & 1.59 & 2.55 & 1 & 16.09 \\ 2.5 & 1.4 & 2.29 & 0.95 & 15.77 \\ 4 & 1.3 & 1.85 & 0.85 & 25 \\ 3 & 1.24 & 2.9 & 0.9 & 16.99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 8 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \cdot (2.5) + 1.59 \cdot 1 + 2.55 \cdot 8 + 1 \cdot 0 + 16.09 \cdot (0.6) \\ 2.5 \cdot (2.5) + 1.4 \cdot 1 + 2.29 \cdot 8 + 0.95 \cdot 0 + 15.77 \cdot (0.6) \\ 4 \cdot (2.5) + 1.3 \cdot 1 + 1.85 \cdot 8 + 0.85 \cdot 0 + 25 \cdot (0.6) \\ 3 \cdot (2.5) + 1.24 \cdot 1 + 2.9 \cdot 8 + 0.9 \cdot 0 + 16.99 \cdot (0.6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.39 \\ 35.43 \\ 41.1 \\ 42.13 \end{pmatrix}$$

Dans le calcul de la question 13 ci-dessus

$$\begin{pmatrix} 3.5 & 1.59 & 2.55 & 1 & 16.09 \\ 2.5 & 1.4 & 2.29 & 0.95 & 15.77 \\ 4 & 1.3 & 1.85 & 0.85 & 25 \\ 3 & 1.24 & 2.9 & 0.9 & 16.99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2.5 \\ 2 & 1 \\ 10 & 8 \\ 5 & 0 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \cdot 3 + 1.59 \cdot 2 + 2.55 \cdot 10 + 1 \cdot 5 + 16.09 \cdot (0.5) & 3.5 \cdot (2.5) + 1.59 \cdot 1 + 2.55 \cdot 8 + 1 \cdot 0 + 16.09 \cdot (0.6) \\ 2.5 \cdot 3 + 1.4 \cdot 2 + 2.29 \cdot 10 + 0.95 \cdot 5 + 15.77 \cdot (0.5) & 2.5 \cdot (2.5) + 1.4 \cdot 1 + 2.29 \cdot 8 + 0.95 \cdot 0 + 15.77 \cdot (0.6) \\ 4 \cdot 3 + 1.3 \cdot 2 + 1.85 \cdot 10 + 0.85 \cdot 5 + 25 \cdot (0.5) & 4 \cdot (2.5) + 1.3 \cdot 1 + 1.85 \cdot 8 + 0.85 \cdot 0 + 25 \cdot (0.6) \\ 3 \cdot 3 + 1.24 \cdot 2 + 2.9 \cdot 10 + 0.9 \cdot 5 + 16.99 \cdot (0.5) & 3 \cdot (2.5) + 1.24 \cdot 1 + 2.9 \cdot 8 + 0.9 \cdot 0 + 16.99 \cdot (0.6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52.23 & 40.39 \\ 45.84 & 35.43 \\ 49.85 & 41.1 \\ 53.48 & 42.13 \end{pmatrix}$$

Pour la question 16

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 10 & 5 & 0.5 \\ 2.5 & 1 & 8 & 0 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.5 & 2.5 & 4 & 3 \\ 1.59 & 1.4 & 1.3 & 1.24 \\ 2.55 & 2.29 & 1.85 & 2.9 \\ 1 & 0.95 & 0.85 & 0.9 \\ 16.29 & 15.77 & 25 & 16.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52.33 & 45.84 & 49.85 & 53.48 \\ 40.51 & 35.43 & 41.1 & 42.13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 10 & 5 & 0.5 \\ 2.5 & 1 & 8 & 0 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.5 & 2.5 & 4 & 3 \\ 1.59 & 1.4 & 1.3 & 1.24 \\ 2.55 & 2.29 & 1.85 & 2.9 \\ 1 & 0.95 & 0.85 & 0.9 \\ 16.29 & 15.77 & 25 & 16.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (3.5) + 2 \cdot (1.59) + 10 \cdot (2.55) + 5 \cdot 1 + 0.5 \cdot (16.29) & 3 \cdot (2.5) + 2 \cdot (1.4) + 10 \cdot (2.29) + 5 \cdot (0.95) + 0.5 \cdot (15.77) & 3 \cdot 4 + 2 \cdot (1.3) + 10 \cdot (1.85) + 5 \cdot (0.85) + 0.5 \cdot 25 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot (1.24) + 10 \cdot (2.9) + 5 \cdot (0.9) + 0.5 \cdot (16.99) \\ 2.5 \cdot (3.5) + 1 \cdot (1.59) + 8 \cdot (2.55) + 0 \cdot 1 + 0.6 \cdot (16.29) & 2.5 \cdot (2.5) + 1 \cdot (1.4) + 8 \cdot (2.29) + 0 \cdot (0.95) + 0.6 \cdot (15.77) & 2.5 \cdot 4 + 1 \cdot (1.3) + 8 \cdot (1.85) + 0 \cdot (0.85) + 0.6 \cdot 25 & 2.5 \cdot 3 + 1 \cdot (1.24) + 8 \cdot (2.9) + 0 \cdot (0.9) + 0.6 \cdot (16.99) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 1 & 8 & 0 & 0.6 \\ 3 & 2 & 10 & 5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.5 & 2.5 & 4 & 3 \\ 1.59 & 1.4 & 1.3 & 1.24 \\ 2.55 & 2.29 & 1.85 & 2.9 \\ 1 & 0.95 & 0.85 & 0.9 \\ 16.29 & 15.77 & 25 & 16.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.51 & 35.43 & 41.1 & 42.13 \\ 52.33 & 45.84 & 49.85 & 53.48 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 1.4 & 2.29 & 0.95 & 15.77 \\ 3 & 1.24 & 2.9 & 0.9 & 16.99 \\ 3.5 & 1.59 & 2.55 & 1 & 16.29 \\ 4 & 1.3 & 1.85 & 0.85 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 8 & 10 \\ 0 & 5 \\ 0.6 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35.43 & 45.84 \\ 42.13 & 53.48 \\ 40.51 & 52.33 \\ 41.1 & 49.85 \end{pmatrix}$$