Autour du théorème de Pythagore
Chapitre 2 du livre 'De question en question'

Vous avez peut-être déjà rencontré une propriété célèbre des triangles rectangles connue sous le nom de théorème de Pythagore. Nous commencerons ce chapitre par la redécouverte de ce théorème et des causes de son succès auprès des bâtisseurs des anciennes Babylone et Égypte. Ensuite, nous suivrons les traces de Pythagore et de ses disciples pour comprendre les raisons de l'émergence de nouveaux nombres : les irrationnels. Nous proposerons également un peu de calcul sur ces nouveaux nombres et nous terminerons par une application importante du théorème.

Pythagore est né à Samos, une petite île près de l'Asie Mineure, au VIe siècle av. J.-C. Vers 530 av. J.-C., il s'installe à Crotone, en Italie méridionale. Il y fonde une communauté, dite des Pythagoriciens, à la fois religieuse et politique, organisée sur un modèle égalitaire. On y prônait des vertus morales et civiques comme le courage, l'austérité, la maîtrise de soi, la modération, l'effort et la discipline collective.

En outre, les Pythagoriciens attribuaient aux nombres un rôle mystique dans le contexte de la religion. Ils croyaient en particulier que l'univers et tout ce qu'il renferme pouvait s'expliquer à l'aide des nombres naturels. Ainsi conçues, les mathématiques dépassaient de loin les recettes pratiques en usage chez les artisans, les marchands et les navigateurs.

Dans les cités grecques de l'Antiquité, on cultivait la pratique des débats publics souvent passionnés. On discutait sur les grands problèmes d'intérêt général. Pour cette raison, on a perfectionné l'art de convaincre. On peut penser que c'est parce qu'ils étaient imprégnés de cette culture de l'argumentation que Pythagore et les Grecs ont fait des mathématiques une science démonstrative, c'est-à-dire une science où on doit convaincre les autres de la justesse de ses affirmations.

Vers l'énoncé du théorème

Problème 1
On considère un triangle rectangle isocèle et les carrés construits sur ses côtés. Peut-on découper les deux petits carrés en pièces et recomposer le grand carré avec ces pièces?

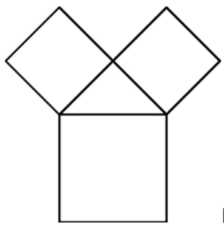

Figure 1

Coupons chacun des deux petits carrés le long d'une diagonale. Les quatre triangles superposables ainsi obtenus remplissent, sans se chevaucher, le grand carré (Figure 2). Ainsi l'aire du grand carré construit sur l'hypoténuse du triangle isocèle est la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.

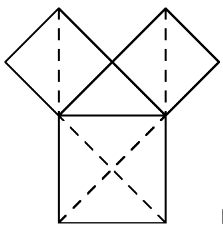

Figure 2

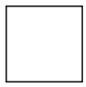

Figure 3

Problème 2
Comment construire un carré dont l'aire est double de l'aire du carré initial ?

Dans le problème 1, les deux carrés construits sur les côtés égaux du triangle isocèle sont identiques, l'aire du grand carré est double de l'aire de chacun des petits carrés. Cela suggère, pour résoudre ce problème-ci, l'une ou l'autre des constructions suivantes (Figure 4).

Figure 4

Problème 3
Nous avons vu dans la solution de la problème 1 que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse (qui est le plus grand côté) d'un triangle rectangle isocèle vaut la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés. Est-ce que d'autres triangles possèdent également cette propriété ?

Considérons d'abord quelques cas de triangles isocèles (Figure 5).

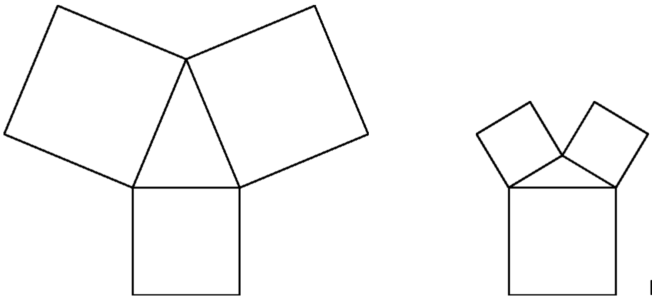

Figure 5

À vue d'oeil, il semble que la propriété ne soit pas vérifiée pour des triangles isocèles non rectangles ; la somme des aires des carrés construits sur les petits côtés est soit plus petite, soit plus grande que l'aire du carré construit sur le troisième côté.

Considérons ensuite des triangles non isocèles. Prenons, par exemple, un triangle quelconque et un triangle rectangle (Figure 6).

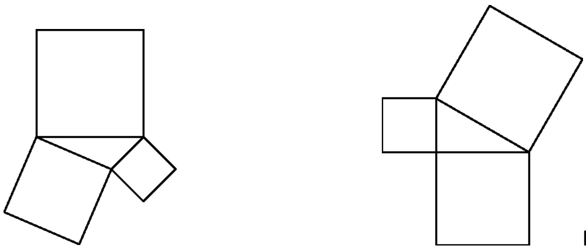

Figure 6

Dans ce cas-ci, il semble, par mesures et par calculs, que seul le triangle rectangle ait quelques chances de posséder la propriété en question. Mais comment le vérifier de façon générale et en particulier quand les dimensions du triangle dépassent largement une feuille du livre ou du cahier ?

À ce stade de nos recherches, la propriété évoquée plus haut n'est encore qu'une conjecture, c'est-à-dire une propriété que nous pensons vraie mais dont nous ne sommes pas entièrement sûrs. Cherchons des preuves de la conjecture ; quand nous en aurons trouvé une, elle deviendra un théorème.

La question qui suit fait un bref retour au triangle isocèle du problème 1 pour préparer des arguments de la preuve pour tous les triangles rectangles.

Problème 4
Dessinez deux fois un même carré dont la longueur du côté est égale à la somme des longueurs des côtés de l'angle droit du triangle rectangle isocèle donné. Disposez quatre triangles identiques au triangle rectangle isocèle de manière à faire apparaître dans l'un, les deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit, et dans l'autre, le carré construit sur l'hypoténuse.

Cette construction donne une nouvelle preuve du fait que dans le cas des triangles rectangles isocèles la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale à l'aire du carré construit sur l'hypoténuse (Figure 7) : en effet les aires colorées sont égales.

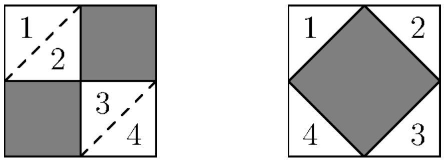

Figure 7

Peut-on imaginer deux dispositions de ce type dans le cas où le triangle rectangle n'est pas isocèle?

Problème 5
Découpez quatre exemplaires d'un triangle rectangle de votre choix et dessinez deux fois un carré dont la longueur du côté est égale à la somme des longueurs des côtés de l'angle droit de votre triangle.
Est-il aussi possible de disposer les quatre triangles dans ces carrés d'une manière qui prouve la propriété de Pythagore ?

En s'inspirant de la Figure 7, on obtient la Figure 8. Dans le carré de gauche, l'espace coloré, complémentaire de celui occupé par les quatre triangles, est égal à l'espace occupé par les carrés construits sur les côtés de l'angle droit du triangle rectangle initial. Dans le carré de droite, l'espace coloré non occupé par les mêmes quatre triangles est égal au carré construit sur l'hypoténuse.

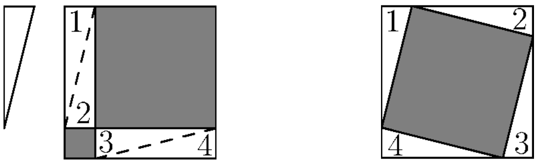

Figure 8

La construction de la Figure 8 peut être reproduite pour un triangle rectangle quelconque. Le résultat est donc acquis pour tous les triangles rectangles et porte le nom de Théorème de Pythagore :

Dans un triangle rectangle, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.

Le théorème de Pythagore en termes de longueurs

La version du théorème de Pythagore telle qu'elle figure dans la solution du problème 1 est celle qui s'avère la plus utile dans les applications.

Problème 1
L'aire d'un carré vaut la somme des aires de deux autres carrés. Ces deux-ci ont des côtés de 30 cm et de 40 cm. Que mesure le côté du premier ?

Additionnons les aires des deux carrés de côtés donnés pour obtenir l'aire du carré de côté inconnu :

$$30^2 + 40^2 = 900 + 1\,600 = 2\,500 = 50^2.$$

Puisque l'aire de ce carré est 2 500 cm², c'est que son côté mesure 50 cm.

Cette question suggère une autre formulation du théorème de Pythagore.

Soient a et b les longueurs des deux côtés d'un triangle rectangle et c la longueur de son hypoténuse. Alors les nombres a, b et c vérifient l'égalité suivante :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Dans la question suivante on découvrira une méthode qui a permis aux batisseurs de Babylone ou de l'ancienne Egypte de construire des murs à angle droit.

Problème 2 Pour vérifier l'angle droit entre deux murs, un maçon procède ainsi: partant d'un point C de l'arête d'intersection des deux murs, il marque un point A situé horizontalement à 30 cm de C (sur un des deux murs) et de même, sur l'autre mur, un point B à 40 cm de C. Ensuite, il mesure la longueur du fil tendu entre les deux marques (figure 9). Quel doit être le résultat de sa mesure si l'angle est effectivement droit ? Pourquoi ?

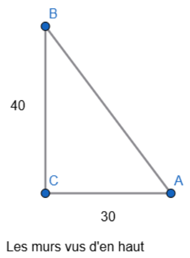

Figure 9

Si l'angle entre les deux murs est droit, alors le triangle ABC est rectangle en C et l'hypoténuse $[AB]$ mesure 50 cm. Or, on ne peut construire qu'un seul triangle dont les côtés mesurent 30, 40 et 50 cm (Math 1, VI 3, p.254). Nous pouvons nous en convaincre en réalisant sa construction à l'échelle, à l'aide du compas.

Dans le problème de l'équerre du maçon, nous avons établi le résultat suivant : si dans un triangle les longueurs des côtés satisfont la relation $30^2 + 40^2 = 50^2$, alors ce triangle est un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 50 cm. On peut généraliser ce résultat :

Si les distances de trois points A, B et C vérifient l'égalité : $|CA|^2 + |CB|^2 = |AB|^2$, alors le triangle ABC est rectangle en C.