



Co-funded by
the European Union

Module 2: Didactics in Mathematics – Day 3 Part I

August, 19-23, Antwerp
Mrs. Gilberte Verbeeck



Universiteit Antwerpen
ASOE | Antwerp
School of Education

Intro

Take a sheet

1. With thick felt-tip pen, write your name at the top of your sheet
2. Solve **one** of the equations during **0,5'**
 - $12x - 5 = 1$
 - $12 \cos x - 5 = 1$
 - $x^2 + x - 6 = 0$
 - $\sin^2 x + \sin x - 6 = 0$
3. With thick felt-tip pen, write your answer on the sheet.

Wait for the signal to raise your sheet.

Activating learners: Importance of didactics

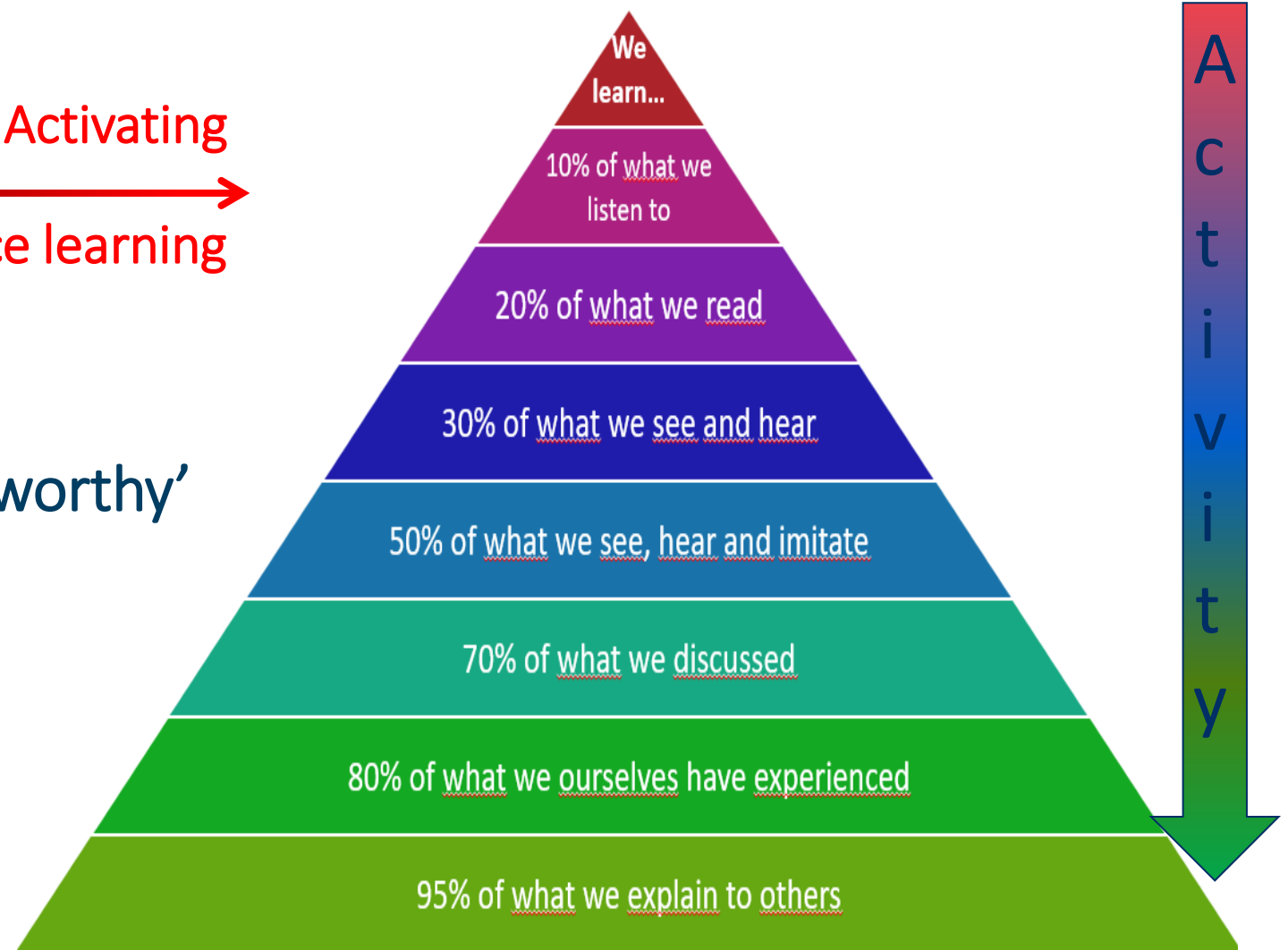
Activating

Non - Activating

← Deep learning → Surface learning

Balance between
Activity <-> 'sufficiently true and worthy'

If learners only play without learning,
the activity is worth nothing.



The learning pyramid of Bales

Teaching method: Lecturing

- What? Deliver information of knowledge - structured and formal
- Pitfall? Learner drops out
- When activating and deep learning? Teacher: PASSION + STRUCTURE
Learner: LISTENING + TAKING NOTES +
AUTONOMOUSLY WORKING/LEARNING
- Rule: 1' – 1,5' per year of age = teacher speaking in a lesson of 45 min



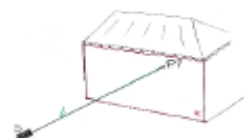
Teaching method: Instructional dialogue (InDi)

- What? Prestructured conversation– question & answer – goal = insight
- Pitfall? Dropping out + pretend attention + mindless copying + ...
- When activating and deep learning? Good questions + questioning techniques + dealing with answers
- Importance of lesson preparation:
 - Clear Thinking Questions that learners **can** answer
 - Crucial questions for steps/concepts that **learners are struggling with**
 - **Two-step model** questions with **possible** answers
 - Dealing with non-response

Activating Non - Activating
← →
Deep learning Surface learning

InDi in lessonplan: good and crucial questions – subject SG

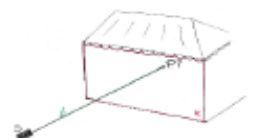
Lesopbouw

Tijd	Lesdoel-nr.	Leerinhoud	Didactische werkvormen – Onderwijs- en leeractiviteiten – Groeperingsvormen	Didactisch materiaal/middelen – Klasschikking
8'	1	Welke methode is geschikt voor welk type oefening?	Herhaling vorige les Oefening ASSOCIATIE in duo: Leerlingen krijgen kaartjes met (zie bijlage 1): * de 3 titels van de stukken theorie uit deze les * de 3 bijbehorende formules/definities in symbolen * 3 toepassingen 5' om zelf puzzel te maken. OLG – klassikaal samen op ppt puzzel overlopen (zie bijlage 2): Slide 1: Welke vergelijking hoort bij welke titel? → (1) Wat stelt de vergelijking $2x - y - z + k = 0$ voor? → Welk verschil is er met een standaardvergelijking? (bv met $3x - y + 2z + 1 = 0$) → Wat is de betekenis van de parameter k? → (2) Wat stellen de twee vergelijkingen voor? → Wat stelt de vergelijking $5x - z - 2 = 0$ voor? → (3) Hoe is de vergelijking van de vlakkenwaaier opgebouwd? → Waar komen de termen $5x - z - 2$ en $x + 2y + z + 1$ in de vergelijking van de vlakkenwaaier vandaan? Slide 2: ook toepassingen verschijnen (genummerd A-B-C) → Welke toepassing hoort bij welke titel? OLG – klassikaal Tekening – gegevens (zonder namen punten, rechte en vlak) en vragen op slide 1 ppt. Welke begrippen uit de ruimtemeetkunde kan je aan deze tekening koppelen? → koppel het juiste begrip aan de juiste naam. Begrippen: punt, rechte, vlak – Namen: lichtstraal, muur, lichtpuntje op muur	Good 1 > 2 > 3 and 4 Kaartjes per leerling Ppt met zelfde kaartjes Bad? Ppt, beamer Bord links
1) Verzameling evenwijdige vlakken		2) Rechte als snijlijn van twee vlakken	3) Vlakkenwaaier	
A		B	C	
$m \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - z - 2 = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$		$2x - y - z + k = 0 \text{ met } k \in \mathbb{R}$	$s(5x - z - 2) + r(x + 2y + z + 1) = 0$ met $s, r \in \mathbb{R}, (s, r) \neq (0, 0)$ Bijbehorende rechte:	
		2	op een gebouw geschenen. 	

Matching

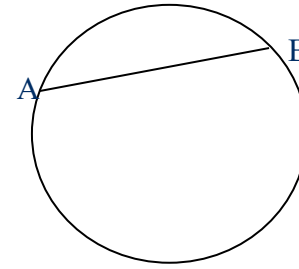
InDi in lessonplan: good and crucial questions – subject SG

Lesopbouw

Tijd	Lesdoel-nr.	Leerinhoud	Didactische werkvormen – Onderwijs- en leeractiviteiten – Groeperingsvormen	Didactisch materiaal/middelen – Klasschikking
8' 4': oef 4': OLG	1	Welke methode is geschikt voor welk type oefening? 1) Verzameling evenwijdige vlakken $2x - y - z + k = 0$ met $k \in \mathbb{R}$ → <u>Toepassing</u>: Vergelijking van een vlak bepalen evenwijdig aan een gegeven vlak, door een gegeven punt. 2) Rechte als snijlijn van twee vlakken $m \leftrightarrow \begin{cases} 5x - z - 2 = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ → <u>Toepassing</u>: Vergelijking van een rechte bepalen door 2 vlakken te zoeken. 3) Vlakkenwaaier Gegeven rechte $m \leftrightarrow \begin{cases} 5x - z - 2 = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ Vlakkenwaaier door m: $s(5x - z - 2) + r(x + 2y + z + 1) = 0$ met $s, r \in \mathbb{R}$, $(s, r) \neq (0, 0)$ → <u>Toepassing</u>: Vergelijking van een vlak bepalen dat een gegeven rechte omvat en door een gegeven punt gaat.	Herhaling vorige les Oefening ASSOCIATIE in duo: Leerlingen krijgen kaartjes met (zie bijlage 1): * de 3 titels van de stukken theorie uit deze les * de 3 bijbehorende formules/definities in symbolen * 3 toepassingen 5' om zelf puzzel te maken. OLG – klassikaal samen op ppt puzzel overlopen (zie bijlage 2): Slide 1: Welke vergelijking hoort bij welke titel? → (1) Wat stelt de vergelijking $2x - y - z + k = 0$ voor? → Welk verschil is er met een standaardvergelijking? (bv met $3x - y + 2z + 1 = 0$) → Wat is de betekenis van de parameter k? → (2) Wat stellen de twee vergelijkingen voor? → Wat stelt de vergelijking $5x - z - 2 = 0$ voor? → (3) Hoe is de vergelijking van de vlakkenwaaier opgebouwd? → Waar komen de termen $5x - z - 2$ en $x + 2y + z + 1$ in de vergelijking van de vlakkenwaaier vandaan? Slide 2: ook toepassingen verschijnen (genummerd A-B-C) → Welke toepassing hoort bij welke titel?	Good 1 > 2 > 3 and 4 1 2 3 4 Kaartjes per leerling Ppt met zelfde kaartjes Bad?
10'	2	Inleidend voorbeeld (situatie 1): Bij lichtshows wordt met lichtstralen op een gebouw geschenen. 	OLG – klassikaal Tekening – gegevens (zonder namen punten, rechte en vlak) en vragen op slide 1 ppt. Welke begrippen uit de ruimtemeetkunde kan je aan deze tekening koppelen? → koppel het juiste begrip aan de juiste naam. Begrippen: punt, rechte, vlak – Namen: lichtstraal, muur, lichtpuntje op muur	Ppt, beamer Bord links

Examples of bad questions

- What is notable about points A and B?



- What else could we do?

$$\frac{9x^2 - 4}{3x^2\sqrt{4 - 9x^2}}$$

- In what way can we arrive at that perfect square?

$$x^2 + 2x - \frac{8}{3} = 0$$

- Can the Pythagorean identity help us further?

$$\text{Find } \cos \alpha \text{ given that } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ and } \alpha \in I$$

Activating InDi : all learners iedereen deeply engage

- Goal = get everyone to think
- How?
 - Interrupt with short assignments:
 - think - pair - share (classroom)
 - Calculate / work out (individual)
 - InDi with (coloured) cards on which
 - Answers
 - justifications of a step
 - justifications to take a further step
 - InDi - Flash talks
 - InDi with blank papers or noteboards with marker

} **next slides**

Activating
← Deep learning

Non - Activating
→ Surface learning

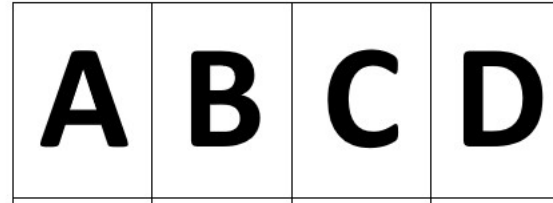
InDi - (coloured) cards and answers

Instruction:

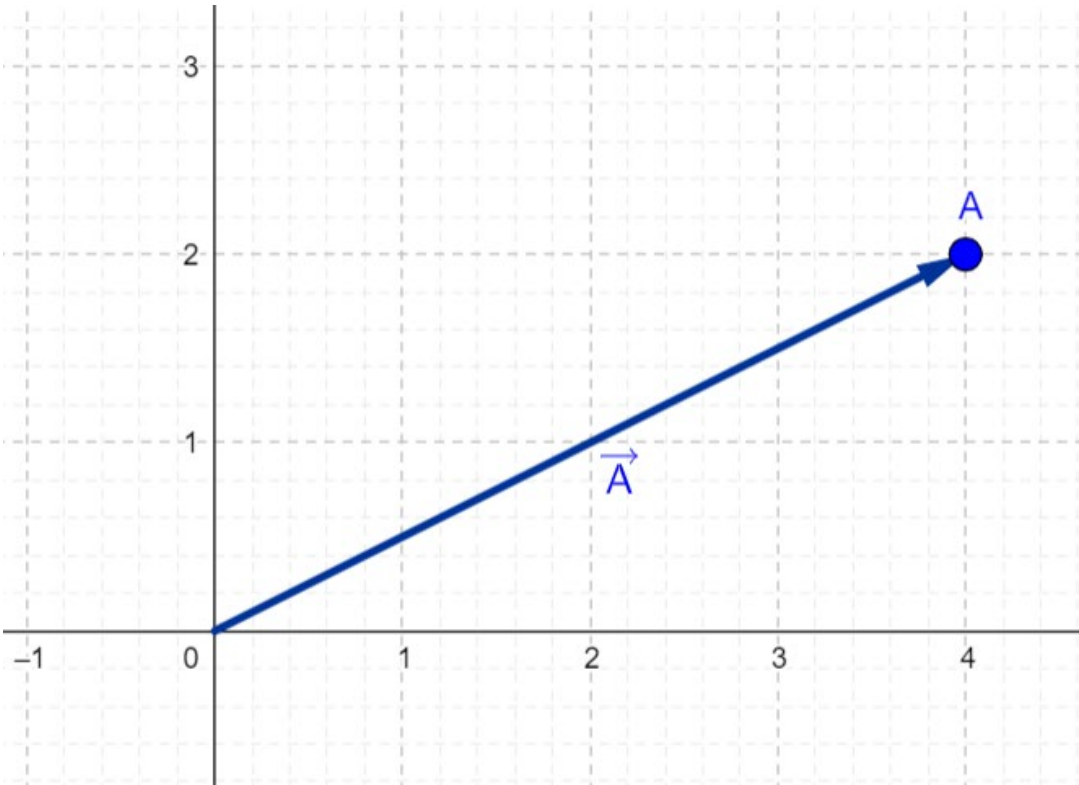
- Teacher asks a multiple-choice question
- Learners look for card with answer
- Teacher gives a signal (1,2,3)
- Learners put the cards in the air

Example:

- About vectors



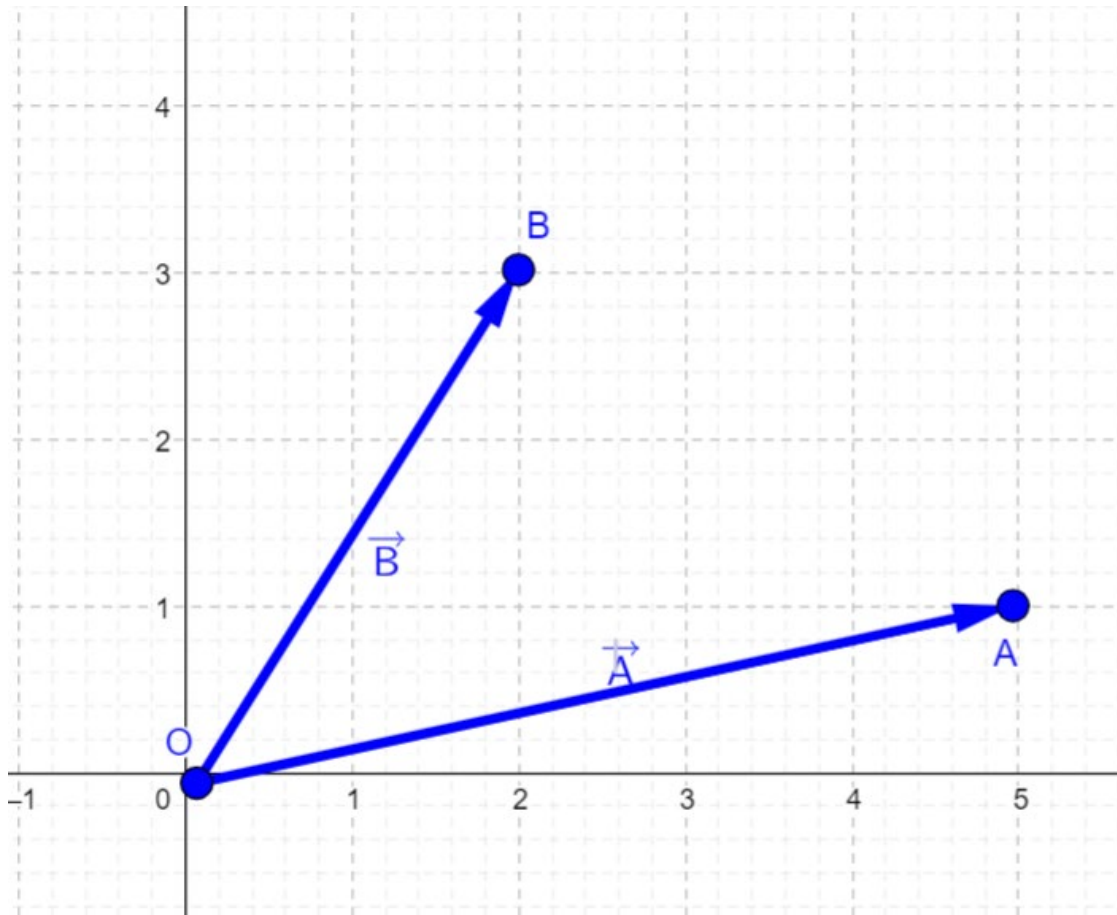
InDi - (coloured) cards and answers



What is the coordinate of the point vector $\vec{A}$?

- (2,4)
- (4,2)
- (2,1)
- (1,2)

InDi – letter cards with answers



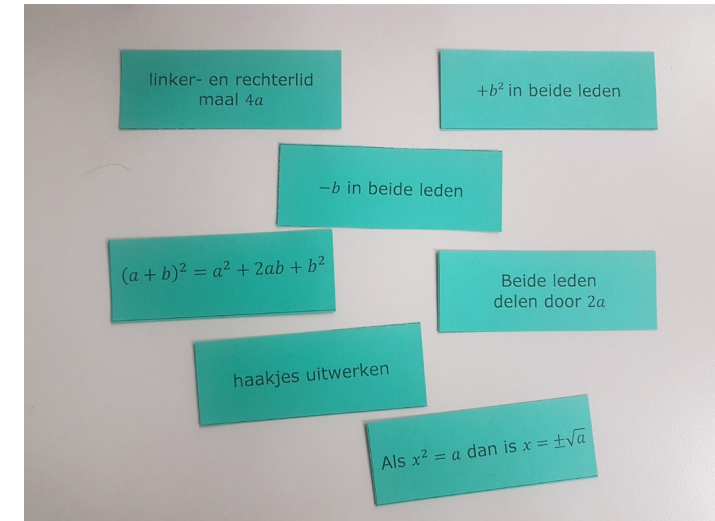
What is the coordinate of the point vector $\vec{A} + \vec{B}$?

- A. (7,3)
- B. (5,3)
- C. (7,4)
- D. (2,7)

InDi – cards: explain the step

Instruction:

- Teacher shows 1 step in a proof
- Learners look for card with justification/formula/rule
- Teacher gives a signal (1,2,3)
- Learners put the cards in the air



Example: proof solutions of $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a(ax^2 + bx + c) = 0$$

linker-en rechterlid maal 4a

InDi – cards: explain the step

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

linker-en rechterlid maal 4a

haakjes uitwerken OF distributiviteit

$+b^2$ in beide leden

$-4ac$ in beide leden

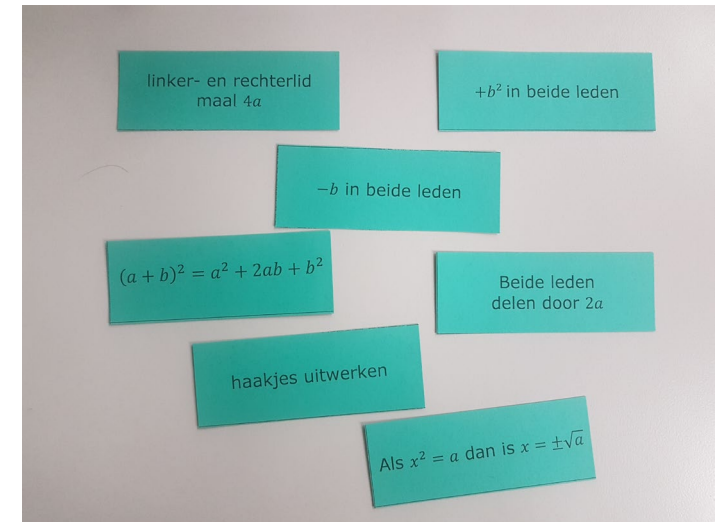
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Let's do it

InDi – cards: formula/rule for the next step

Instruction:

- Teacher shows start/step in a proof
- Learners look for card with a rule/formule to take a next step
- Teacher gives a signal (1,2,3)
- Learners put the cards in the air



Example: Proof solutions of $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

linker-en rechterlid maal 4a

InDi – cards: formula/rule for the next step

$$a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

als $x^2 = a$ dan is $x = \pm\sqrt{a}$

$-b$ in beide leden

beide leden delen door $2a$

Let's do it and continue the proof

InDi – Flash talks

Instruction:

- Teacher shows start proof, asks a question and indicates a learner
- Learner immediately has to answer the question
- If the answer is not given promptly, the teachers indicates another learner

Example: Proof solutions of $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Condition: Tempo AND THUS good classroom climate

InDi – Flash talks

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

linker-en rechterlid maal 4a

haakjes uitwerken OF distributiviteit

$+b^2$ in beide leden

$-4ac$ in beide leden

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Let's do it in English

InDi – blank papers (scrap paper - notice boards)

Instruction:

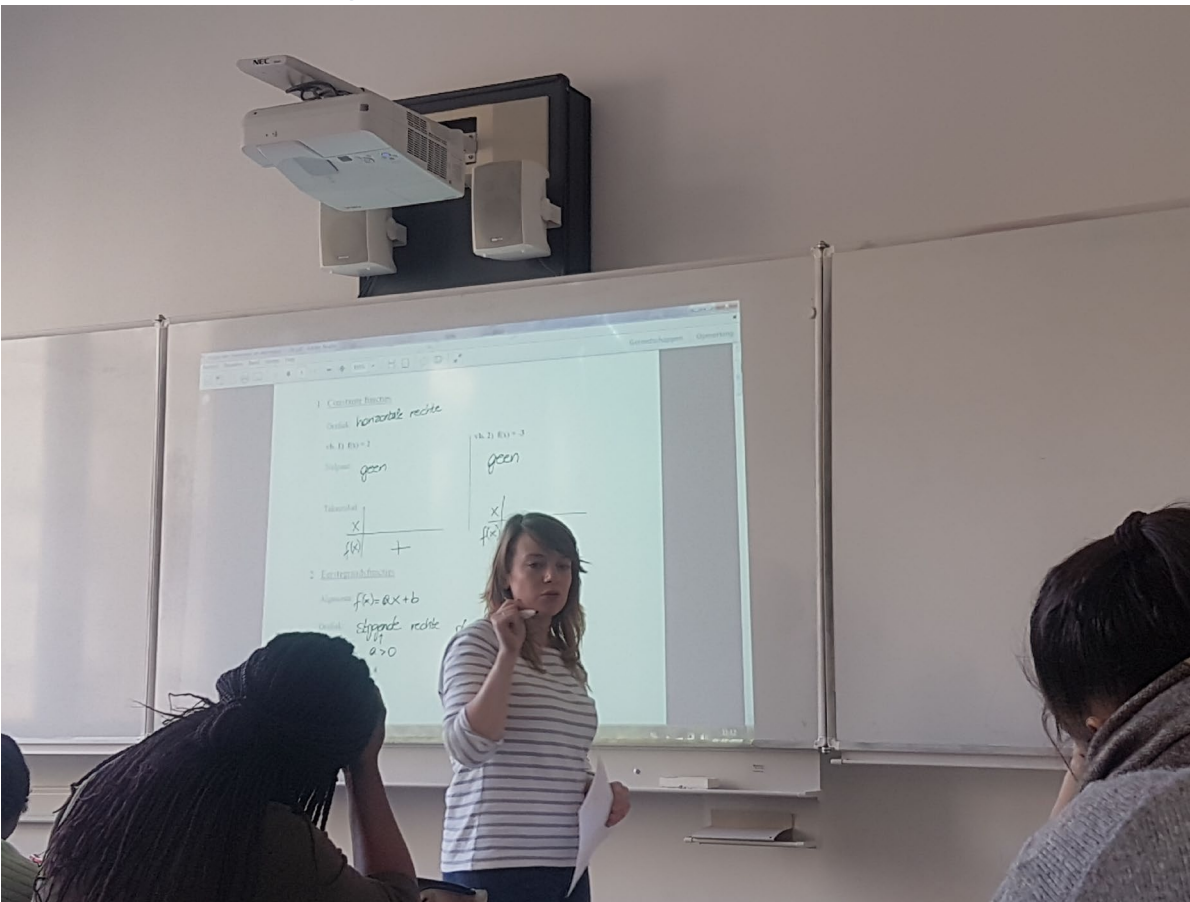
- Teacher asks a question
- Learners write down answer on paper/board individually or in pairs
- Teacher gives a signal (1,2,3)
- Learners put the papers/boards in the air

Examples:

- Graph of a straight line
- Combinatorics

InDi – blank papers (scrap paper - notice boards)

Example: Graph of a straight line



InDi – blank papers (scrap paper - notice boards)

Example: Combinatorics

Instruction:

- 'Betaal' €1.
- Vul 1 rooster in: Kruis in 1 van de 14 roosters 6 getallen aan
- Trekking van deze week: [De lotto](#)
 - Wie heeft prijs?
 - Wie wint?
- Bepaal het aantal manieren om 1 rooster in te vullen en schrijf je antwoord op het kladpapier.
- Leerkracht zegt 1, 2, 3. Op 3 steek je je papier omhoog.

$$C_{45}^6 = 8145060$$

- Plan B: Waar vind je dit aantal op het formulier?



Plan B: Activating InDi: additional advantage



Supporting language-focused subject lessons!

Characteristics of language-focused subject lessons:

1. Context-rich
2. **Lots of interaction (via the InDi)**
3. **Language support (response to learners' answers)**

Questions?



Plan B: hier foto van dag 1 invoegen



Recap day 1: A good maths lesson

Working on

- *Kilpatrick consistency between **definition** and **image** of a concept: cognitive schemas*
- *From concrete to abstract (plan B)*
- *Generic examples (new)*



From concrete to abstract

Group 1: Ellipse

Material: rope

Task: How can you use this material to prepare the following abstract definitions from the concrete?

Group 2: Perpendicular bisector

Material: stones

Een ellips is de verzameling van de punten van het vlak, waarvoor de som van de afstanden tot twee gegeven punten F en F' constant is.

$$\mathcal{E} = \{D \in \pi \mid |DF| + |DF'| = 2a\}$$

Een middelloodlijn is de verzameling van punten van het vlak die evenver liggen van twee gegeven punten A en B.

$$L = \{D \in \pi \mid |DA| = |DB|\}$$



Generic examples (new – link with day 1)

- **Goal: to derive formula for distance between two points**
- **Which task do you give and why?**
 1. Distance origin to $Q(4,3,2)$, 2 times Pythagoras
 2. Distance from $P(3,1,5)$ to $Q(4,3,2)$, 2 times Pythagoras
 - a) Bereken de afstand van de oorsprong tot het punt Q met coördinaten $(4, 3, 2)$ door de stelling van Pythagoras twee keer toe te passen.
 - b) Bereken op dezelfde manier de afstand van het punt R met coördinaten $(3, 1, 1)$ tot Q .
 - c) Bereken op dezelfde manier de afstand van het punt P met coördinaten $(3, 1, 5)$ tot Q .



Generic examples (new)

- **Goal: to derive formula for distance between two points**
- **Which task do you give and why?**
 1. Distance origin to $Q(4,3,2)$, 2 times Pythagoras
 2. Distance from $P(3,1,5)$ to $Q(4,3,2)$, 2 times Pythagoras
 - a) Bereken de afstand van de oorsprong tot het punt Q met coördinaten $(4, 3, 2)$ door de stelling van Pythagoras twee keer toe te passen.
 - b) Bereken op dezelfde manier de afstand van het punt R met coördinaten $(3, 1, 1)$ tot Q .
 - c) Bereken op dezelfde manier de afstand van het punt P met coördinaten $(3, 1, 5)$ tot Q .



Level of abstraction and difficulty

- Goal: Proof $y = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

- Concrete example but difficult

- Increase difficulty in different steps

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 10x + 21 \\ &= 2 \cdot \left(x^2 - 5x + \frac{21}{2} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{21}{2} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{17}{4} \right) \\ &= 2 \cdot \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{17}{2} \end{aligned}$$



Increase difficulty in different steps

$$f: y = x^2$$

$$g_1 \text{ heeft vergelijking } y = x^2 + 6x + 9.$$

$$y = (x + 3)^2$$

$$g_2 \text{ heeft vergelijking } y = 0.5x^2 + 3x + 4.5$$

$$y = 0.5(x + 3)^2$$

$$g_3 \text{ heeft vergelijking } y = 2x^2 + 12x + 23. \quad y = 2 \cdot \left(x^2 + 6x + \frac{23}{2} \right)$$

$$y = 2 \cdot \left((x + 3)^2 + \frac{5}{2} \right)$$

$$g_4 \text{ heeft vergelijking } y = 2x^2 - 10x + 21$$

$$y = 2 \cdot \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{17}{2}$$



Questions?



Assignment

- **Write out an Instructional Dialogue for the topic in the following slide or a free topic**
- **Contextualise the ideas from the morning session**
 - Which ideas do I want to take with me to my lectures/context and why?
 - What critical needs does these ideas answer?
 - What are obstacles to success?
 - What/Who do you need to minimise the obstacles?

Task InDi: (two-step)questions

Door x te vervangen met je x-waarde en y met je y-waarde en dan te zien of deze vergelijking klopt

$$P = -6$$

$$P = 1/3$$

Verkeerde vraagstelling, niet hoe maar wanneer: voor welke waarde voor p klopt deze uitspraak.

liggen op de rechte a: $y = -3x + 6$:

Eventuele vragen IIn:

Hoe kan ik controleren of een punt op de rechte ligt?

*46, p288

Bepaal telkens de waarde van p, zodat

$$A(6 ; 2p) \text{ E a: } 2y = -3x + p$$

$$B(-p ; 3p) \text{ E b: } y - 5x - 8 = 0$$

Eventuele vragen IIn:

Hoe kunnen we nu controleren of het punt op de rechte ligt?

welke stappen moet ik ondernemen

correctiesleutel

E is wrong symbol for $\in$

Task InDi: (two-step)questions

Partnerwork for exercise in rectangle:

Draft Questions for InDi.

Differentiation in tempo: When you are ready, decide which of the activating methods of this session you can use for the InDi and work it out.

Door x te vervangen met je x-waarde en y met je y-waarde en dan te zien of deze vergelijking klopt

$$P = -6$$

$$P = 1/3$$

Verkeerde vraagstelling, niet hoe maar wanneer: voor welke waarde voor p klopt deze uitspraak.

liggen op de rechte a: $y = -3x + p$:

Eventuele vragen IIn:

Hoe kan ik controleren of een punt op de rechte ligt?

*46, p288

Bepaal telkens de waarde van p, zodat

$$A(6; 2p) \text{ E a: } 2y = -3x + p$$

$$B(-p; 3p) \text{ E b: } y - 5x - 8 = 0$$

Eventuele vragen IIn:

Hoe kunnen we nu controleren of het punt op de rechte ligt?

welke stappen moet ik ondernemen

E is wrong symbol for €

Task InDi: (two-step)questions

1. How can you check whether a point lies on a line?

- Check whether $(2,1)$ lies on the line with equation $y = 2x - 3$.
 - If $x = 1$, what is y ? Then what are coordinates of the point lying on the line?
- Check whether $(6,4)$ lies on the line with equation $2y = -3x + 5$.
- Check whether $(6,2p)$ lies on the line with equation $2y = -3x + 5$. What do you notice?

2. Use the condition that the point $(6,2p)$ must lie on the line.

- Check whether $(6,2p)$ lies on the line with equation $2y = -3x + p$.

3. Which mathematical concept (which procedure) do you have to use now to solve the problem?

Door x te vervangen met je x-waarde en y met je y-waarde en dan te zien of deze vergelijking klopt

$$P = -6$$

$$P = 1/3$$

Verkeerde vraagstelling, niet hoe maar wanneer: voor welke waarde voor p klopt deze uitspraak.

liggen op de rechte a: $y = -3x + 5$:

Eventuele vragen lln:

Hoe kan ik controleren of een punt op de rechte ligt?

*46, p288

Bepaal telkens de waarde van p, zodat

$$A(6; 2p) \in a: 2y = -3x + p$$

$$B(-p; 3p) \in b: y - 5x - 8 = 0$$

Eventuele vragen lln:

Hoe kunnen we nu controleren of het punt op de rechte ligt?
welke stappen moet ik ondernemen